点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとき，$\sqrt{3}x+y$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$x^2+2xy+3y^2$ の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(15 名城大 理工 1(1))

【答】

ア	イ
$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}+4$

【解答】

$\mathrm{P}(x,\ y)$ は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上の点なので

$$x=\sqrt{2}\cos\theta,\ y=\sqrt{2}\sin\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおくことができる．このとき

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x+y &= \sqrt{2}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\\ &= 2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \quad (\because\ \text{合成の公式})\end{aligned}$$

とでき，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$ なので

最小値は　$\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$　……(答)

であり，また

$$\begin{aligned}&x^2+2xy+3y^2\\ &= 2\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+6\sin^2\theta\\ &= 2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\sin 2\theta+6\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad (\because\ \text{半角の公式, 2 倍角の公式})\\ &= 2(\sin 2\theta-\cos 2\theta)+4\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\theta\right)+4\\ &= 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+4 \quad (\because\ \text{合成の公式})\end{aligned}$$

とでき，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{15}{4}\pi$ なので

最大値は　$\boldsymbol{2\sqrt{2}+4}$　……(答)

である．

- 前半は円 $x^2+y^2=2$ と直線 $\sqrt{3}x+y=k$ が共有点をもつ条件を考えることにより，最大値を求めることができる．

$$(\text{中心と直線との距離}) \leqq (\text{半径}) \iff \frac{|-k|}{\sqrt{3+1}} \leqq \sqrt{2}$$

$$\therefore\quad |k| \leqq 2\sqrt{2} \qquad \therefore\quad -2\sqrt{2} \leqq k \leqq 2\sqrt{2}$$

よって，$\sqrt{3}x+y$ の最小値は $-2\sqrt{2}$ である．
後半についてはこのような図形的手法は使えない．