$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数

$$f(x) = \sin(x-\alpha)\cos x \quad \left(\alpha \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

は $x = \boxed{(う)}$ において最大値をとる． この最大値が $\dfrac{1}{4}$ となるのは $\alpha = \boxed{(え)}$ のときである．

(15 慶應大 医 1(3))

【答】

(う)	(え)
$\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

【解答】

積を和に直す公式より

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x-\alpha)\cos x \\ &= \frac{1}{2}\{\sin(2x-\alpha) + \sin(-\alpha)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\sin(2x-\alpha) - \sin\alpha\} \end{aligned}$$

ここで，$\alpha \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\alpha \leqq 2x - \alpha \leqq \pi - \alpha$$

であり，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$2x - \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

となる x は存在し

$$f(x) \leqq \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha)$$

が成り立つ．等号が成り立つとき $f(x)$ は最大となる．このときの x は ① を満たすから

$$x = \boldsymbol{\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．この最大値が $\dfrac{1}{4}$ となるのは

$$\frac{1}{2}(1 - \sin\alpha) = \frac{1}{4} \qquad \therefore \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

のときであり，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\alpha = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．