四角形 ABCD は円 O に内接し $\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BC}=2,\ \cos\angle\mathrm{ABC}=-\dfrac{1}{3}$ をみたしており，$\triangle\mathrm{ADC}$ の面積は $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の 2 倍とする．

(1) AC の長さを求めよ．

(2) $\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}$ の値を求めよ．

(3) $\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2$ の値を求めよ．

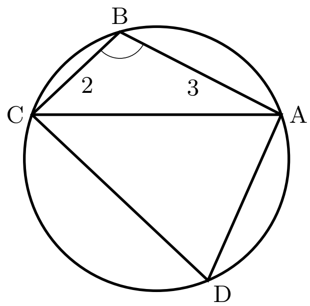
(4) $\mathrm{AD}<\mathrm{CD}$ のとき AD と CD の長さを求めよ．

(15 青森公立大 3)

【答】

(1) $\mathrm{AC}=\sqrt{17}$
(2) $\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}=12$
(3) $\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2=25$
(4) $\mathrm{AD}=3,\ \mathrm{CD}=4$

【解答】



(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}\\&=9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\\&=17\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathbf{AC=\sqrt{17}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $\angle\mathrm{ABC}=\beta$ とおくと，四角形 ABCD は円 O に内接しているから $\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\beta$ である．また，$\triangle\mathrm{ADC}$ の面積は $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の 2 倍であるから

$$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\sin(180^\circ-\beta)=2\times\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin\beta$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\sin\beta=6\sin\beta$$

$$\therefore\quad \mathbf{AD\cdot CD=12} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $\triangle\mathrm{ADC}$ で余弦定理を用いると

$$(\sqrt{17})^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos(180^\circ-\beta)$$

$$17=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-2\cdot12\cdot\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \mathbf{AD^2+CD^2=25} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $\mathrm{AD}^2,\ \mathrm{CD}^2$ は

$$x^2-25x+12^2=0$$

の解である．

$$(x-9)(x-16)=0 \qquad \therefore\quad x=9,\ 16$$

$\mathrm{AD}<\mathrm{CD}$ より

$$\mathrm{AD}^2=9,\ \mathrm{CD}^2=16 \qquad \therefore\quad \mathbf{AD=3,\ CD=4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．