

$BC = \sqrt{3}$ ,  $CA = 2$ ,  $\angle BCA = 30^\circ$  の三角形 ABCにおいて、頂点 B から辺 CA に下した垂線と辺 CA の交点を D とするとき、内積  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$  の値は カ であり、内積  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$  の値は キ である。

(15 工学院大 工・情報・先進工・建築 1(4))

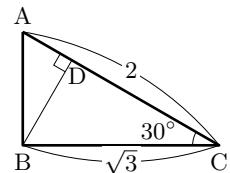
|     |               |                |
|-----|---------------|----------------|
| 【答】 | カ             | キ              |
|     | $\frac{9}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ |

【解答】

始点を C にそろえて、内積を計算する。右図より

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{CB}| |\overrightarrow{CA}| \cos 30^\circ = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{\sqrt{3} \cos 30^\circ}{2} \overrightarrow{CA} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CA}$$



であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \frac{3}{4} \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= \frac{3}{4} \times 3 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) \\ &= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot \left( \frac{3}{4} \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \right) \\ &= -|\overrightarrow{CB}|^2 + \frac{7}{4} \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - \frac{3}{4} |\overrightarrow{CA}|^2 \\ &= -3 + \frac{7}{4} \times 3 - \frac{3}{4} \times 4 \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- 余弦定理より

$$AB^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \cos 30^\circ = 1 \quad \therefore AB = 1$$

であり、 $AB^2 + BC^2 = CA^2$  が成り立つから、△ABC は  $\angle ABC = 90^\circ$  の直角三角形である。△ADB  $\sim$  △ABC であり

$$\angle ABD = 30^\circ, BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= -|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BD}| \cos 30^\circ \\ &= -1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

- 始点を B にそろえると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= -|\overrightarrow{BD}| \times (|\overrightarrow{BA}| \cos \angle ABD) \\ &= -|\overrightarrow{BD}|^2 \\ &= -|(\sqrt{3} \sin 30^\circ)|^2 \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$