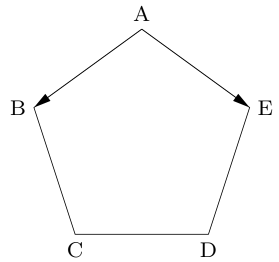
一辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE がある．$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $l = |\overrightarrow{\mathrm{EC}}|$ とするとき，以下の問いに答えよ．



(1) AB と EC が平行であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, l を用いて表せ．

(2) 内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を l を用いて表せ．

(3) l を求めよ．

(15 東北学院大 工 2)

【答】

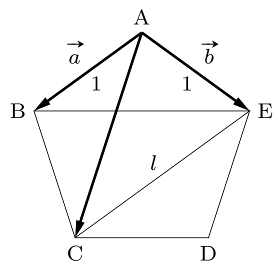
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = l\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

(2) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -\dfrac{1}{2l}$ $\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1 - \dfrac{l^2}{2} \text{でもよい}\right)$

(3) $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解答】

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$, $|\overrightarrow{\mathrm{EC}}| = l$, $\overrightarrow{\mathrm{EC}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{EC}} = l\overrightarrow{a}$ と表すことができる．よって



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}} \\ &= \boldsymbol{l\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(2) 図の対称性から $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = l$ なので

$$|l\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 = l^2$$
$$l^2|\overrightarrow{a}|^2 + 2l\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 = l^2$$
$$l^2 + 2l\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 1 = l^2$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -\frac{1}{2l}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\triangle$ABE に着目する．図の対称性から $|\overrightarrow{\mathrm{BE}}| = l$ なので

$$|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|^2 = l^2$$
$$|\overrightarrow{a}|^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 = l^2$$
$$1 - 2\left(-\frac{1}{2l}\right) + 1 = l^2 \quad (\because \ (2))$$
$$\therefore \quad l^3 - 2l - 1 = 0$$
$$\therefore \quad (l+1)(l^2 - l - 1) = 0$$

$l > 0$ であるから

$$\boldsymbol{l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (2) において $\triangle$ABE に着目すると，図の対称性から $|\overrightarrow{\mathrm{BE}}| = l$ なので

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = l^2$$
$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = l^2$$
$$1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1 = l^2$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - \frac{l^2}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

このとき (3) は，図の対称性から $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = l$ なので

$$|l\vec{a} + \vec{b}|^2 = l^2 \quad (\because\ (1))$$
$$l^2|\vec{a}|^2 + 2l\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = l^2$$
$$l^2 + 2l\left(1 - \frac{l^2}{2}\right) + 1 = l^2 \quad (\because\ (2))$$
$$\therefore \quad l^3 - 2l - 1 = 0$$

以下解答と同じ．