$\vec{a}$, $\vec{b}$ を単位ベクトルとし，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}$ とおく．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とし，$x=\cos\theta$ とおく．

(1) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の大きさを x を用いて表せ．
(2) 内積 $\vec{c}\cdot\vec{d}$ を x を用いて表せ．
(3) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角も θ に等しいとき，θ を求めよ．

(15 群馬大 理工・教育・社会情報 3)

【答】

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{2x+2}$, $|\vec{d}|=\sqrt{5-4x}$
(2) $\vec{c}\cdot\vec{d}=x+1$
(3) $\theta=60^\circ$

【解答】

(1)
$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=x$$
であるから
$$|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\boldsymbol{\sqrt{2x+2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$|\vec{d}|=|-\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|b|^2}=\boldsymbol{\sqrt{5-4x}} \qquad \cdots\cdots(答)$$
である．

(2) 与えられた条件より
$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\vec{d}&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+2\vec{b})\\&=-|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2\\&=\boldsymbol{x+1}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$
である．

(3) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角は θ に等しいから
$$\begin{aligned}&\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta\\\iff&x+1=\sqrt{2x+2}\sqrt{5-4x}\times x\\\iff&\sqrt{x+1}=\sqrt{2}x\sqrt{5-4x} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$
辺々を平方すると
$$\begin{aligned}&x+1=2x^2(5-4x)\\&8x^3-10x^2+x+1=0\\&(x-1)(2x-1)(4x+1)=0\end{aligned}$$
$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $-1<x<1$ である．このとき，①の左辺は正だから右辺も正であり $x>0$ を得る．したがって，$0<x<1$ であり
$$x=\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\theta=60^\circ} \qquad \cdots\cdots(答)$$
である．