空間内に点 $\mathrm{A}(3,\ 7,\ 5)$ と $\vec{a}=(1,\ 2,\ 2)$ がある．点 A を通り $\vec{a}$ に垂直な平面 α 上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとるとき，次の問いに答えよ．

(1) $x,\ y,\ z$ の間に成り立つ関係式を求めよ．
(2) 原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろすとき，点 H の座標を求めよ．
(3) 平面 α と球面 $x^2+y^2+z^2=225$ が交わってできる円の半径を求めよ．

(15 東北学院大 文系 2 月 2 日 6)

【答】

(1) $x+2y+2z-27=0$
(2) $\mathrm{H}(3,\ 6,\ 6)$
(3) 12

【解答】

(1) 点 P が平面 α 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{a} \text{ または } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{a}=0$$
$$(x-3,\ y-7,\ z-5)\cdot(1,\ 2,\ 2)=0$$
$$\therefore\quad 1\times(x-3)+2\times(y-7)+2\times(z-5)=0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{x+2y+2z-27=0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\parallel\vec{a}$ であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}=(k,\ 2k,\ 2k)$$

と表すことができる．H は平面 α 上の点であるから，(1) より

$$k+2\times 2k+2\times 2k-27=0$$
$$9k-27=0 \qquad \therefore\quad k=3$$

よって，点 H の座標は

$$\mathbf{H(3,\ 6,\ 6)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) から

$$\mathrm{OH}=\sqrt{3^2+6^2+6^2}=9$$

であり，求める円の半径は

$$\sqrt{225-9^2}=\sqrt{144}=\mathbf{12} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- H の座標を求めなくても，OH の長さを求めることはできる．

$$\begin{aligned}\mathrm{OH}&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{の}\vec{a}\text{への正射影ベクトル}|\\&=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\right|=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{a}|}{|\vec{a}|}\\&=\frac{|3\times1+7\times2+5\times2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{27}{3}=9\end{aligned}$$