

整数 a, b を用いて

$$(\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{10})^2 = 17 + a\sqrt{2} + b\sqrt{5} - 2\sqrt{10}$$

と表すとき, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.

(16 北海道科学大 1)

【答】	ア	イ
	-10	4

【解答】

左辺を展開すると

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{10})^2 &= 2 + 5 + 10 - 2\sqrt{2 \cdot 5} - 2\sqrt{5^2 \cdot 2} + 2\sqrt{2^2 \cdot 5} \\ &= 17 - 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

であるから, 与えられた条件式は

$$\begin{aligned} 17 - 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{10} &= 17 + a\sqrt{2} + b\sqrt{5} - 2\sqrt{10} \\ \therefore -10\sqrt{2} + 4\sqrt{5} &= a\sqrt{2} + b\sqrt{5} \end{aligned}$$

a, b は整数, $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ は無理数であるから

$$\mathbf{a = -10, \quad b = 4}$$

……(答)

- 無理数 $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ に対して, 有理数 a, a', b, b' が

$a\sqrt{2} + b\sqrt{5} = a'\sqrt{2} + b'\sqrt{5}$ ならば, $a = a'$ かつ $b = b'$ が成り立つことが, 背理法を用いて示すことができる.