$x^2-4x+1=0$ のとき，$x^3+\dfrac{1}{x^3}$，$x^5+\dfrac{1}{x^5}$ の値を求めよ．

【答】 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=52,\quad x^5+\dfrac{1}{x^5}=724$

【解答】

$x^2-4x+1=0$ は，$x=0$ を解にもたないから，両辺を x で割って

$$x-4+\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore\quad x+\frac{1}{x}=4 \qquad \cdots\cdots ①$$

①より

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=4^2-2\cdot 1=14 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot x^2\right)\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=4\cdot 14-4\\&=\mathbf{52} \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

……(答)

また，①，②，③より

$$\begin{aligned}x^5+\frac{1}{x^5}&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\cdot x^3\right)\\&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=14\cdot 52-4\\&=\mathbf{724}\end{aligned}$$

……(答)

- $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ については，3 次の等式 (数学 II)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

を利用することもできる．

- $a_n=x^n+\dfrac{1}{x^n}$ とおくと

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)-\left(x\cdot\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{x}\cdot x^{n+1}\right)\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\\&=4a_{n+1}-a_n\end{aligned}$$

が成り立つ．これを用いると，$a_1 = 4,\ a_2 = 14$ により

$$a_3 = 4 \cdot 14 - 4 = 52$$
$$a_4 = 4 \cdot 52 - 14 = 194$$
$$a_5 = 4 \cdot 194 - 52 = 724$$

を得る．