

$x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$, $y = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ.

- (1) $x^2 + y^2$
 (2) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

(16 東北学院大 文系 2)

【答】

- (1) 23
 (2) $-\sqrt{3}$

【解答】

(1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$
 ここで

$$x + y = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} + \frac{5 + \sqrt{21}}{2} = 5$$

$$xy = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \cdot \frac{5 + \sqrt{21}}{2} = \frac{25 - 21}{4} = 1$$

であるから

$$x^2 + y^2 = 5^2 - 2 \cdot 1 = \mathbf{23} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} = 5 - 2\sqrt{1} = 3$
 $0 < x < y$ より $\sqrt{x} - \sqrt{y} < 0$ であるから

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \mathbf{-\sqrt{3}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- 2重根号を外すことを考えてもよい.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{21}}{2}} - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{21}}{2 \cdot 2}} - \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{21}}{2 \cdot 2}} \\ &= \frac{\sqrt{(7+3) - 2\sqrt{7 \cdot 3}}}{2} - \frac{\sqrt{(7+3) + 2\sqrt{7 \cdot 3}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2}}{2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2} \\ &= \mathbf{-\sqrt{3}} \end{aligned}$$