

$\alpha = -1 + 2i$ とする. $x = \alpha$ が 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解であるような実数の組 (a, b) は $(a, b) = \boxed{(\text{ウ})}$ である. また $\alpha^5 + 2\alpha^4 + 3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 5\alpha$ の値は $\boxed{(\text{エ})}$ である.

(16 慶應大 看護医療 1(2))

【答】	(ウ)	(エ)
	(2, 5)	$-39 - 2i$

【解答】

$\alpha = -1 + 2i$ は実数係数の 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解であるから, $\bar{\alpha} = -1 - 2i$ も解である. 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = -a \\ \alpha\bar{\alpha} = b \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\{(-1 + 2i) + (-1 - 2i)\} = 2 \\ b = (-1 + 2i)(-1 - 2i) = (-1)^2 - 2^2 \cdot i^2 = 5 \end{cases}$$

$$\therefore (a, b) = (2, 5) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- $\alpha = -1 + 2i$ は 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解であるから

$$(-1 + 2i)^2 + a(-1 + 2i) + b = 0$$

$$(-3 - 4i) + a(-1 + 2i) + b = 0$$

$$\therefore (-3 - a + b) - (4 - 2a)i = 0$$

a, b は実数であるから

$$\begin{cases} -3 - a + b = 0 \\ 4 - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 5$$

- p, q が実数, α が虚数のとき

$$p\alpha + q = 0 \iff p = q = 0$$

であることを利用する.

$$\alpha = -1 + 2i \text{ より}$$

$$(\alpha + 1)^2 = (2i)^2 \quad \therefore \alpha^2 + 2\alpha + 1 = -4$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

である. また, α は $x^2 + ax + b = 0$ の解であるから

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

でもある. $\textcircled{7}, \textcircled{1}$ の差をとると

$$(a - 2)\alpha + (b - 5) = 0$$

a, b は実数で, α は虚数であるから

$$a - 2 = b - 5 = 0$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 5$$

また、与えられた式を $\alpha^2 + 2\alpha + 5$ で割ると、下のようになる。

$$\begin{array}{r}
 \alpha^3 \quad -2\alpha \quad +8 \\
 \alpha^2 + 2\alpha + 5 \overline{) \alpha^5 + 2\alpha^4 + 3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 5\alpha} \\
 \underline{\alpha^5 + 2\alpha^4 + 5\alpha^3} \\
 -2\alpha^3 + 4\alpha^2 + 5\alpha \\
 \underline{-2\alpha^3 - 4\alpha^2 - 10\alpha} \\
 8\alpha^2 + 15\alpha \\
 \underline{8\alpha^2 + 16\alpha + 40} \\
 -\alpha - 40
 \end{array}$$

$\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
 & \alpha^5 + 2\alpha^4 + 3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 5\alpha \\
 &= (\alpha^3 - 2\alpha + 8)(\alpha^2 + 2\alpha + 5) - \alpha - 40 \\
 &= -\alpha - 40 \\
 &= -(-1 + 2i) - 40 \\
 &= \mathbf{-39 - 2i}
 \end{aligned}$$

……(答)

である。