

次の方程式を解きなさい。

$$\sqrt{5-2x} - x + 2 = 0$$

(16 福島大 理工 1(1))

【答】 $x = 1 + \sqrt{2}$

【解答】

$$\sqrt{5-2x} - x + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① を同値変形する。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff \sqrt{5-2x} = x-2 \\ &\iff \begin{cases} 5-2x = (x-2)^2 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

よって、解は

$$x = 1 + \sqrt{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

- ① を変形した式 $\sqrt{5-2x} = x-2$ の辺々を平方すると

$$\begin{aligned} 5-2x &= (x-2)^2 \\ 5-2x &= x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

① の成立を確認する。

$x = 1 + \sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sqrt{5-2(1+\sqrt{2})} - (1+\sqrt{2}) + 2 \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2} \\ &= (\sqrt{2}-1) + 1 - \sqrt{2} \\ &= 0 \quad (\textcircled{1} \text{を満たす}) \end{aligned}$$

$x = 1 - \sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sqrt{5-2(1-\sqrt{2})} - (1-\sqrt{2}) + 2 \\ &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2} \\ &= (\sqrt{2}+1) + 1 + \sqrt{2} \\ &= 2(\sqrt{2}+1) \\ &\neq 0 \quad (\textcircled{1} \text{を満たさない}) \end{aligned}$$

よって、解は

$$x = 1 + \sqrt{2}$$

である。

- $y = \sqrt{5-2x}$ のグラフと $y = x-2$ のグラフは右図となる。

方程式 $5-2x = (x-2)^2$ から得られる解

$$x = 1 \pm \sqrt{5-2x}$$

において、大きい方の解 $x = 1 + \sqrt{2}$ は

$$\sqrt{5-2x} = x-2 \text{ の解}$$

であり、小さい方の解 $x = 1 - \sqrt{2}$ は

$$-\sqrt{5-2x} = x-2 \text{ の解}$$

である。

よって、求める解は

$$x = 1 + \sqrt{2}$$

である。

