実数 a に対して

$$f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x$$

とおく．定義域を $\{x \mid x \leqq 1$ または $x \geqq 4\}$ とする関数 $y = f(x)$ が逆関数を持つような a の範囲を求めよ．

(16 滋賀医大 4(1))

【答】 $a = 0$ または $1 \leqq a < \dfrac{7}{4}$

【解答】

$$f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x \quad (x \leqq 1 \text{ または } 4 \leqq x)$$

$y = f(x)$ が逆関数をもつ条件は，値域内の y となる x がただ 1 つ存在することである．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18ax + 12a^2 \\ &= 6(x-a)(x-2a) \end{aligned}$$

(i) $a = 0$ のとき

$f'(x) = 6x^2 \geqq 0$ であり，$f(x)$ は単調増加である．したがって，$f(x)$ は $-\infty < x < +\infty$ の範囲で逆関数をもつから，「$x \leqq 1$ または $4 \leqq x$」の範囲でも $f(x)$ は逆関数をもつ．

(ii) $a > 0$ のとき

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$5a^3$	$\searrow$	$4a^3$	$\nearrow$

$y = f(x)$ が逆関数をもつ条件は，$f(x)$ が「$x \leqq 1$ または $4 \leqq x$」の範囲で単調増加となり，$f(1) < f(4)$ となることである．

$$\begin{cases} 1 \leqq a < 2a \leqq 4 \\ f(1) < f(4) \end{cases} \qquad \therefore \quad (*) \begin{cases} 1 \leqq a \leqq 2 \\ f(4) - f(1) > 0 \end{cases}$$

ここで

$$\begin{aligned} f(4) - f(1) &= (128 - 144a + 48a^2) - (2 - 9a + 12a^2) \\ &= 126 - 135a + 36a^2 \\ &= 9(4a^2 - 15a + 14) \\ &= 9(4a-7)(a-2) \end{aligned}$$

であり，$(*)$ を満たす a の値の範囲は

$$1 \leqq a < \frac{7}{4}$$

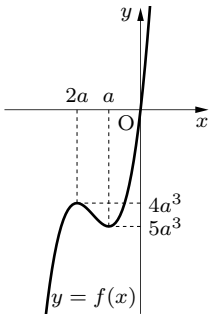
である．

(iii) $a < 0$ のとき

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	$5a^3$	$\nearrow$

$$f(2a) = 4a^3 < 0 = f(0) < f(1)$$

であることに注意すると，$5a^3 < y < 4a^3$ を満たす y に対して，x は 3 個存在するから，関数 $y = f(x)$ は逆関数をもたない．



以上 (i)，(ii)，(iii) より，求める a の範囲は

$$\boldsymbol{a = 0 \text{ または } 1 \leqq a < \frac{7}{4}}$$

……(答)

である．