曲線 $y=\sqrt{x+2}$ と直線 $y=x+a$ が共有点をもつとき定数 a のとりうる値の範囲は $\boxed{②}$ であり，共有点の数が 2 個でかつ，その共有点の y 座標がともに正であるとき，a のとりうる値の範囲は $\boxed{③}$ である．

(16 関西大 システム理工・環境都市工・化生工 4(2))

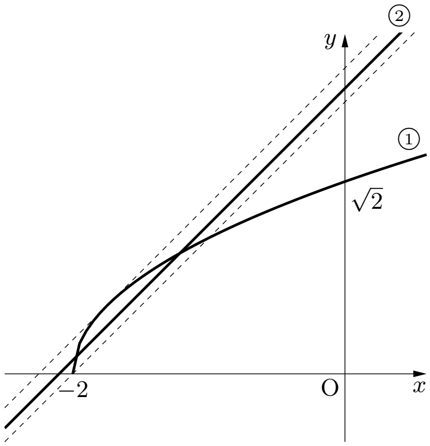
【答】

②	③
$a \leqq \dfrac{9}{4}$	$2 < a < \dfrac{9}{4}$

【解答】

$$y=\sqrt{x+2} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=x+a \qquad \cdots\cdots ②$$



① と ② が接するのは

$$\sqrt{x+2}=x+a \qquad \cdots\cdots ③$$

が重解をもつときである．

$$x+2=(x+a)^2$$
$$x^2+(2a-1)x+a^2-2=0$$

判別式を D とおくと

$$D=(2a-1)^2-4(a^2-2)$$
$$=-4a+9$$

であり，重解をもつのは $D=0$ のときであり

$$a=\frac{9}{4}$$

である．

a は ② の y 切片の y 座標であり，① と ② が共有点をもつ a の値の範囲は，グラフより

$$\boldsymbol{a \leqq \frac{9}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

② が点 $(-2,\ 0)$ を通るのは

$$0=-2+a \qquad \therefore \quad a=2$$

のときであり，共有点が 2 個ある a の値の範囲は $2 \leqq a < \dfrac{9}{4}$ で，このうち y 座標がともに正になるのは

$$\boldsymbol{2 < a < \frac{9}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 同値変形を利用する．

  ① と ② が共有点をもつ条件は

$$\sqrt{x+2}=x+a \qquad \cdots\cdots ③$$

が実数解をもつことである．

$$③ \iff \begin{cases} x+2=(x+a)^2 \\ x+a \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+(2a-1)x+a^2-2=0 & \cdots\cdots ㋐ \\ x+a \geqq 0 & \cdots\cdots ㋑ \end{cases}$$

「㋐ かつ ㋑」を満たす実数 x が存在するための a の条件を求める．㋐ の判別式を D とおくと

$$D=(2a-1)^2-4(a^2-2)=-4a+9$$

であり，実数解をもつ条件は $D \geqq 0$ であるから

$$a \leqq \frac{9}{4}$$

である．また，㋐ の解は $x=\dfrac{-2a+1\pm\sqrt{D}}{2}$ であり，$x=\dfrac{-2a+1+\sqrt{D}}{2}$ は

$$x+a=\frac{-2a+1+\sqrt{D}}{2}+a=\frac{1+\sqrt{D}}{2}>0$$

を満たすから，㋑ はつねに成り立つ．

よって，① と ② が共有点をもつ a の範囲は

$$a \leqq \frac{9}{4}$$

である．

つぎに，共有点が 2 個存在し，かつ共有点の y 座標がともに正となる条件は

$$\begin{cases} D>0 & \cdots\cdots ㋒ \\ \dfrac{-2a+1-\sqrt{D}}{2}+a>0 & \cdots\cdots ㋓ \end{cases}$$

が成り立つことである．

$$㋒ \iff a<\frac{9}{4}$$

であり，㋓ を整理すると

$$1-\sqrt{D}>0 \iff \begin{cases} 1>D \\ D \geqq 0 \end{cases} \iff 0 \leqq D<1$$

$$\therefore \quad 0 \leqq -4a+9<1 \qquad \therefore \quad 2<a \leqq \frac{9}{4}$$

したがって，㋒ かつ ㋓ を満たす a は

$$2<a<\frac{9}{4}$$

である．