座標平面上の点 A$(0,\ 2a)$，B$(3a,\ 0)$，C$(0,\ -2a)$, D$(-3a,\ 0)$ を頂点とする四角形 ABCD の各辺と，放物線 $y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{2}{3}$ の共有点を考える．ただし，a は正の定数とする．

(1) 共有点の総数が 4 個になるときの四角形 ABCD の面積を求めよ．
(2) 共有点の総数が最も多くなるような a の値の範囲を求めよ．

(16 青森公立大 2)

【答】
(1) $\dfrac{25}{12}$
(2) $\dfrac{1}{3}<a<\dfrac{5}{12}$

【解答】

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

この放物線は下に凸で，頂点の座標は $\left(0,\ -\dfrac{2}{3}\right)$ であり，x 軸と $(\pm1,\ 0)$ で交わる．また，放物線と四角形 ABCD は y 軸に関して対称である．

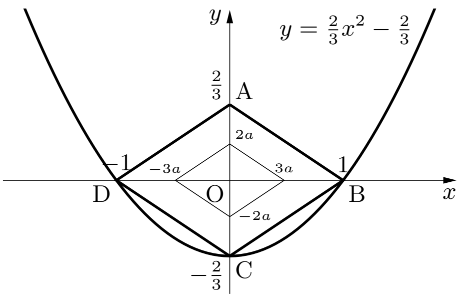
(1) 点 B と放物線と x 軸との交点 $(1,\ 0)$ の位置に着目して場合分けする．a は正の定数である．

(i) $0<3a<1$ $\left(0<a<\dfrac{1}{3}\right)$ のとき

$-\dfrac{2}{3}<-2a<0$ でもあるから，点 B, C は放物線の上側にある．四角形は x 軸，y 軸に関して対称であるから，放物線と四角形 ABCD は共有点をもたない．

(ii) $3a=1$ $\left(a=\dfrac{1}{3}\right)$ のとき

$-2a=-\dfrac{2}{3}$ でもあるから，3 点 B，C，D は放物線と四角形 ABCD の共有点である．



$0<a<\dfrac{1}{3}$, $a=\dfrac{1}{3}$ のとき

(iii) $3a>1$ $\left(a>\dfrac{1}{3}\right)$ のとき

辺 AB，AD と放物線はそれぞれ 1 個ずつ共有点をもつ．また，辺 CB，CD と放物線の共有点は a の値が大きくなるとき，それぞれ 2 個，1 個，0 個と変化していく．

したがって，対称性も考えると，共有点の総数が 4 個となるのは，辺 CB と放物線の共有点が 1 個，すなわち，直線 BC と放物線が接するときである．

直線 BC の方程式は

$$y=\frac{2}{3}x-2a$$

であり

$$\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x-2a$$

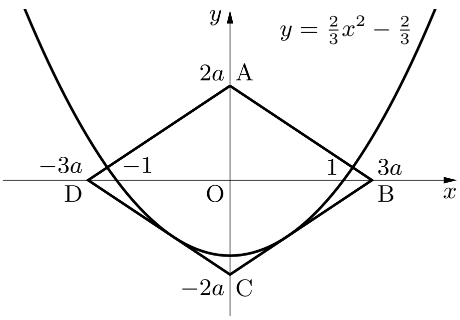
$$\therefore\quad x^2-x+3a-1=0$$

が重解をもつことである．(判別式) $=0$ より，a の値は

$$(-1)^2-4(3a-1)=0$$

$$\therefore\quad a=\frac{5}{12}$$

である．



$a=\dfrac{5}{12}$ のとき

このとき，四角形 ABCD の面積は

$$
\begin{aligned}
4 \times \triangle\mathrm{OAB} &= 4 \times \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 2a \\
&= 12a^2 = \boldsymbol{\frac{25}{12}} \quad \left(\because\ a = \frac{5}{12}\right)
\end{aligned}
$$
……(答)

である．

(2) 共有点の総数が最も多くなるのは共有点が 6 個のときであり，このようになる a の値の範囲は

$$
\boldsymbol{\frac{1}{3} < a < \frac{5}{12}}
$$
……(答)

である．