倍数，余り

a, b, c, m を整数とする．

(1) $a-b$ と $b-c$ がともに m の倍数ならば，$a-c$ も m の倍数であることを示せ．

(2) 等式

$$a^{n+1}-b^{n+1}=a^n(a-b)+b(a^n-b^n) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を利用して，すべての自然数 n に対して a^n-b^n は $a-b$ の倍数であることを，数学的帰納法により示せ．

(3) 2016 を素因数分解せよ．また，2^{2016} を 127 で割った余りを求めよ．

(16 室蘭工大 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$，余りは 1

【解答】

(1) $a-b$ と $b-c$ がともに m の倍数ならば

$$a-b=mk,\ b-c=ml \quad (k,\ l \text{ は整数})$$

とおくことができる．このとき

$$a-c=(a-b)+(b-c)=m(k+l)$$

となり，$a-c$ も m の倍数である．　　　　……(証明終わり)

(2) すべての自然数 n に対して「a^n-b^n は $a-b$ の倍数である ……(∗)」ことを，数学的帰納法により示す．

(i) $n=1$ のとき

a^1-b^1 は $a-b$ の倍数であるから，$n=1$ のとき (∗) は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．すなわち

$$a^k-b^k=(a-b)N \quad (N \text{ は整数})$$

と表すことができると仮定すると

$$\begin{aligned} a^{k+1}-b^{k+1} &= a^k(a-b)+b(a^k-b^k) \\ &= a^k(a-b)+b(a-b)N \\ &= (a-b)(a^k+bN) \end{aligned}$$

となるから，$a^{k+1}-b^{k+1}$ も $a-b$ の倍数であり，$n=k+1$ のときも (∗) は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して (∗) は成り立つ．　　　　……(証明終わり)

- $a^n - b^n$ を a についての多項式をみて $f(a) = a^n - b^n$ とおくと，$f(b) = 0$ であり，因数定理から $f(a)$ は $a - b$ を因数にもつ．すなわち，$a^n - b^n$ は $a - b$ の倍数である．
  実際，$a^n - b^n$ は
  $$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
  として因数分解される．

(3) 2016 を素因数分解すると

$$\mathbf{2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$2^{2016} = 2^{7\cdot 288} = 128^{288}$ であり，(2) より $128^{288} - 1^{288}$ は $128 - 1 (= 127)$ の倍数である．これより

$$128^{288} - 1^{288} = 127M \quad (M \text{ は整数})$$
$$\therefore \quad 2^{2016} = 127M + 1$$

と表すことができる．

よって，2^{2016} を 127 で割った **余りは 1** である． ……(答)

- 二項定理を利用してもよい．
  $$\begin{aligned} 2^{2016} &= 2^{7\cdot 288} = 128^{288} = (127+1)^{288} \\ &= {}_{288}\mathrm{C}_{288} \cdot 127^{288} + {}_{288}\mathrm{C}_{287} \cdot 127^{287} + \cdots + {}_{288}\mathrm{C}_{1} \cdot 127^{1} + {}_{288}\mathrm{C}_{0} \cdot 127^{0} \\ &= 127({}_{288}\mathrm{C}_{288} \cdot 127^{287} + {}_{288}\mathrm{C}_{287} \cdot 127^{286} + \cdots + {}_{288}\mathrm{C}_{1} \cdot 127^{0}) + 1 \\ &= 127M + 1 \quad (M \text{ は整数}) \end{aligned}$$
  であり，2^{2016} を 127 で割った余りは 1 である．