0 でない複素数 z の極形式を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，次の複素数を極形式で表せ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，また z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す．

(1) $-\overline{z}$

(2) $\dfrac{1}{z^2}$

(3) $z - |z|$

(16 佐賀大 理工 3)

【答】

(1) $-\overline{z} = r\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\}$

(2) $\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\}$

(3) $z - |z| = 2r\sin\dfrac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}\right)\right\}$

【解答】

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

(1) $\overline{z}$ は z と共役な複素数であるから

$$\begin{aligned} -\overline{z} &= -r(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= r(-\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \boldsymbol{r\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= z^{-2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(3) $|z| = r$ であるから

$$\begin{aligned} z - |z| &= r(\cos\theta + i\sin\theta) - r \\ &= r\{-(1 - \cos\theta) + i\sin\theta\} \\ &= r\left(-2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2r\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2r\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq \dfrac{\theta}{2} < \pi$ より $2r\sin\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$ であるから，$z - |z|$ を極形式で表すと

$$\boldsymbol{2r\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}}$$ ……(答)

である．