複素数平面上の 2 点 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ が次の 2 つの条件をみたすとする．ただし，$\mathrm{O}(0)$ は原点である．

- 線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積が 1 に等しい．
- O を端とする半直線 OP 上に Q がある．

(1) z を w を用いて表せ．

(2) 点 $\mathrm{A}(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき，Q の軌跡を図示せよ．ただし，i は虚数単位である．

(3) $r>0$ とし，β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする．P が点 $\mathrm{B}(\beta)$ を中心とする半径 r の円上を一周するとき，Q の軌跡を求めよ．

(16 北海道大 後 理・工 3)

【答】

(1) $z=\dfrac{1}{\overline{w}}$

(2) 略

(3) $\left|w-\dfrac{\beta}{|\beta|^2-r^2}\right|=\dfrac{r}{\left||\beta|^2-r^2\right|}$

【解答】

(1) 与えられた 2 つの条件から

$$|z||w|=1 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$w=tz \ (t \text{ は正の実数}) \qquad \cdots\cdots ②$$

②を①へ代入して

$$|z||tz|=1$$
$$t=\frac{1}{|z|^2}=|w|^2=w\overline{w}$$

よって

$$z=\frac{w}{t}=\frac{w}{w\overline{w}}=\boldsymbol{\frac{1}{\overline{w}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\mathrm{P}(z)$ は $\mathrm{A}(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円からの O を除いた部分を動くから

$$|z-(1-i)|=\sqrt{2} \quad (z \neq 0) \qquad \cdots\cdots ㋐$$
$$|z-(1-i)|^2=2 \quad (z \neq 0)$$
$$\{z-(1-i)\}\{\overline{z}-(1+i)\}=2 \quad (z \neq 0)$$

$z=\dfrac{1}{\overline{w}}$ を代入すると

$$\left\{\frac{1}{\overline{w}}-(1-i)\right\}\left\{\frac{1}{w}-(1+i)\right\}=2 \quad \left(\frac{1}{\overline{w}} \neq 0\right)$$
$$\iff \begin{cases} \{1-(1-i)\overline{w}\}\{1-(1+i)w\}=2w\overline{w} & \cdots\cdots ③ \\ w \neq 0 \end{cases}$$

③を変形すると

$$1-(1+i)w-(1-i)\overline{w}=0$$
$$(1+i)w+\overline{(1+i)w}=1 \qquad \cdots\cdots ③'$$

$w=x+yi$ ($x,\ y$ は実数, $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$) とおくと

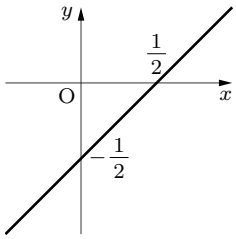
$$(1+i)w=(1+i)(x+yi)=x-y+(x+y)i$$

であるから，③$'$ は

$$2(x-y)=1$$
$$\therefore\quad y=x-\frac{1}{2}$$

このとき $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ である．

Q の軌跡を図示すると右図となる．



- ⑦以降を次のように処理してもよい．

$$\left|\frac{1}{\overline{w}}-(1-i)\right|=\sqrt{2}$$
$$\iff \begin{cases}|1-(1-i)\overline{w}|=\sqrt{2}\,|\overline{w}|\\ w\neq 0\end{cases}$$
$$\iff |1-(1-i)\overline{w}|=\sqrt{2}\,|\overline{w}|$$
$$\iff \left|\overline{w}-\frac{1}{1-i}\right|=|\overline{w}|$$
$$\iff \left|w-\frac{1-i}{2}\right|=|w|$$

w は点 0 と $\dfrac{1-i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線である．

(3) $\mathrm{P}(z)$ が中心 $\mathrm{B}(\beta)$，半径 r ($\neq|\beta|$) の円周上を動くから

$$|z-\beta|=r$$
$$|z-\beta|^2=r^2$$
$$(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})=r^2$$

$z=\dfrac{1}{\overline{w}}$ を代入すると

$$\left(\frac{1}{\overline{w}}-\beta\right)\left(\frac{1}{w}-\overline{\beta}\right)=r^2$$
$$\iff \begin{cases}(1-\beta\overline{w})(1-\overline{\beta}w)=r^2w\overline{w}\\ w\neq 0\end{cases}$$
$$\iff (1-\beta\overline{w})(1-\overline{\beta}w)=r^2w\overline{w} \qquad \cdots\cdots ④$$

④を変形すると

$$(|\beta|^2-r^2)w\overline{w}-\overline{\beta}w-\beta\overline{w}+1=0$$

$r \neq |\beta|$ より

$$w\overline{w} - \frac{\overline{\beta}}{|\beta|^2 - r^2}w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2}\overline{w} + \frac{1}{|\beta|^2 - r^2} = 0$$

$$\left(w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2}\right)\left(\overline{w} - \frac{\overline{\beta}}{|\beta|^2 - r^2}\right) = \frac{|\beta|^2}{(|\beta|^2 - r^2)^2} - \frac{1}{|\beta|^2 - r^2}$$

$$\left|w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2}\right|^2 = \left(\frac{r}{|\beta|^2 - r^2}\right)^2$$

よって

$$\left|w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2}\right| = \frac{r}{\left||\beta|^2 - r^2\right|}$$

であり，Q の軌跡は

$$\textbf{中心：}\frac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|^2 - \boldsymbol{r}^2}, \quad \textbf{半径：}\frac{\boldsymbol{r}}{\left||\boldsymbol{\beta}|^2 - \boldsymbol{r}^2\right|}\textbf{の円} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．