複素数平面上の相異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して

$$(3+9i)\alpha-(8+4i)\beta+(5-5i)\gamma=0$$

が成立するとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ の実部と虚部を求めよ．

(2) $\angle$ACB の大きさと $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(16 同志社大 理工 2)

【答】

(1) (実部) $=\dfrac{3}{4}$，(虚部) $=\dfrac{3}{4}$

(2) $\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

(3) $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

【解答】

$$(3+9i)\alpha-(8+4i)\beta+(5-5i)\gamma=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) ($*$) を変形することにより，α, β, γ の一つを他の 2 つで表すことができる．β を α, γ で表すと，$\beta=\dfrac{(3+9i)\alpha+(5-5i)\gamma}{8+4i}$ であるから

$$\begin{aligned}\beta-\gamma&=\frac{(3+9i)\alpha+(5-5i)\gamma}{8+4i}-\gamma\\&=\frac{(3+9i)\alpha+(-3-9i)\gamma}{8+4i}\\&=\frac{3+9i}{8+4i}(\alpha-\gamma)\end{aligned}$$

である．$\alpha\neq\gamma$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}&=\frac{3+9i}{8+4i} \qquad \cdots\cdots ㋐\\&=\frac{3(1+3i)}{4(2+i)}=\frac{3(1+3i)(2-i)}{4(2+i)(2-i)}=\frac{3(5+5i)}{4\cdot 5}\\&=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\end{aligned}$$

したがって，**実部，虚部ともに** $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ である． ……(答)

- ($*$) を

$$(3+9i)(\alpha-\gamma)-(8+4i)(\beta-\gamma)=0$$

と変形することに気付けば，直ちに ㋐ が得られる．

(2) (1) の結果を極形式で表すと

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i=\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

である．よって

$$\angle\mathrm{ACB}=\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{|\beta-\gamma|}{|\alpha-\gamma|}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) △ABC で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\angle\mathrm{ACB}\\ &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{AC}\right)^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{AC}\right)\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\frac{\pi}{4} \quad (\because\ (2))\\ &= \left(\frac{9}{8}+1-\frac{3}{2}\right)\mathrm{AC}^2\\ &= \frac{5}{8}\mathrm{AC}^2\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

- (1) の変形をまねると

$$\begin{aligned}\beta-\alpha &= \frac{(3+9i)\alpha+(5-5i)\gamma}{8+4i}-\alpha\\ &= \frac{(-5+5i)\alpha+(5-5i)\gamma}{8+4i}\\ &= \frac{5-5i}{8+4i}(\gamma-\alpha)\end{aligned}$$

であり

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{|\beta-\alpha|}{|\gamma-\alpha|} = \left|\frac{5-5i}{8+4i}\right| = \frac{\sqrt{25+25}}{\sqrt{64+16}} = \sqrt{\frac{50}{80}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

を得る.