i を虚数単位とする．複素数 z が等式 $|iz+3|=|2z-6|$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) この等式を満たす点 z 全体は，どのような図形を表すか答えよ．
(2) $z-\overline{z}=0$ を満たす z を求めよ．
(3) $|z+i|$ の最大値を求めよ．

(16 秋田大 医 1)

【答】
(1) 中心 $4-i$，半径 $2\sqrt{2}$の円
(2) $z=4\pm\sqrt{7}$
(3) $4+2\sqrt{2}$

【解答】

$$|iz+3|=|2z-6| \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① を変形すると

$$\begin{aligned} ① &\iff |i||z-3i|=|2||z-3| \\ &\iff |z-3i|=2|z-3| \\ &\iff |z-3i|^2=4|z-3|^2 \end{aligned}$$

展開し整理すると

$$\begin{aligned} &(z-3i)(\overline{z}+3i)=4(z-3)(\overline{z}-3) \\ &z\overline{z}+3iz-3i\overline{z}+9=4(z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9) \\ &3z\overline{z}-(12+3i)z-(12-3i)\overline{z}+27=0 \\ &z\overline{z}-(4+i)z-(4-i)\overline{z}+9=0 \\ &\{z-(4-i)\}\{\overline{z}-(4+i)\}-(4-i)(4+i)+9=0 \\ &\{z-(4-i)\}\overline{\{z-(4-i)\}}-17+9=0 \\ \therefore\ &|z-(4-i)|^2=8 \\ \therefore\ &|z-(4-i)|=2\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ①' \end{aligned}$$

となるから，点 z 全体が表す図形は

中心 $4-i$，半径 $2\sqrt{2}$の円 ……(答)

である．

- ① より

$$|z-3i|:|z-3|=2:1$$

であり，P(z)，A($3i$)，B(3) とおくと

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$$

であり，点 P の軌跡は線分 AB を $2:1$ に内分する点 C と外分する点 D を直径の両端とする円 (アポロニウスの円) である．

$$\mathrm{C}:\frac{1\cdot 3i+2\cdot 3}{2+1}=2+i,\quad \mathrm{D}:\frac{-1\cdot 3i+2\cdot 3}{2-1}=6-3i$$

であり，この円は

$$\text{中心}:\frac{(2+i)+(6-3i)}{2}=4-i,$$

$$\text{半径}:|(2+i)-(4-i)|=|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

である．

(2) $$z - \overline{z} = 0 \iff z \text{ は実数である}$$

このとき

$$①' \iff (z-4)+1^2 = (2\sqrt{2})^2$$

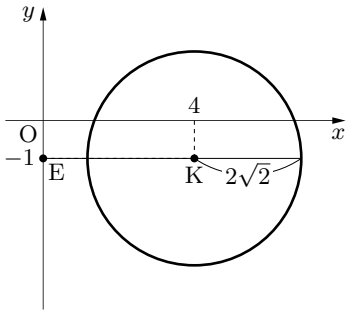
$$\therefore \quad \boldsymbol{z = 4 \pm \sqrt{7}}$$ ……(答)

である．

(3) (1) で求めた円を K とする．$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{E}(-i)$ とすると，

$$|z+i| = |z-(-i)| = \mathrm{EP}$$

である．線分 EP の長さが最大となるのは，K の中心を $\mathrm{K}(4-i)$ としたとき，E，K，P がこの順に並ぶときである．



$$\begin{aligned} &(\text{EP の最大値}) \\ &= \mathrm{EK} + (\text{円 } K \text{ の半径}) \\ &= \boldsymbol{4 + 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．