連立漸化式

各項が正の数である 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad b_1 = e, \quad a_{n+1} = {a_n}^5 \cdot {b_n}^3, \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $c_n = \log a_n$, $d_n = \log b_n$ とおく．ただし，対数は自然対数とする．

$$c_{n+1} + \alpha d_{n+1} = \beta(c_n + \alpha d_n)$$

を満たす定数 α, β の組をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(16 室蘭工大 4)

【答】

(1) $(\alpha,\ \beta) = (1,\ 4),\ (3,\ 2)$

(2) $a_n = e^{3\cdot 2^{n-2}(2^{n-1}-1)}$, $b_n = e^{2^{n-2}(3-2^{n-1})}$

【解答】

$$a_1 = 1, \quad b_1 = e$$

$$(*) \begin{cases} a_{n+1} = {a_n}^5 \cdot {b_n}^3 \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n}{a_n} \end{cases} \qquad (n \geqq 1)$$

(1) $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ かつ $(*)$ であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $a > 0$, $b > 0$ が成り立つ．$(*)$ の辺々の対数をとることができ，このとき $(*)$ は

$$\begin{cases} \log a_{n+1} = 5\log a_n + 3\log b_n \\ \log b_{n+1} = -\log a_n + \log b_n \end{cases}$$

となり，$c_n = \log a_n$, $d_n = \log b_n$ とおくと

$$\begin{cases} c_{n+1} = 5c_n + 3d_n \\ d_{n+1} = -c_n + d_n \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．次に

$$c_{n+1} + \alpha d_{n+1} = \beta(c_n + \alpha d_n)$$

を満たす定数 α, β の組を求める．左辺に ① を代入すると

$$\begin{aligned} c_{n+1} + \alpha d_{n+1} &= (5c_n + 3d_n) + \alpha(-c_n + d_n) \\ &= (5-\alpha)c_n + (3+\alpha)d_n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (5-\alpha)c_n + (3+\alpha)d_n = \beta(c_n + \alpha d_n)$$

すべての自然数 n に対して成り立つ条件は

$$\begin{cases} 5 - \alpha = \beta \\ 3 + \alpha = \alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 5 - \alpha \\ 3 + \alpha = \alpha(5-\alpha) \end{cases}$$

第 2 式を解くと

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$$
$$(\alpha - 1)(\alpha - 3) = 0$$
$$\therefore \quad \alpha = 1,\ 3$$

よって

$$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta) = (1,\ 4),\ (3,\ 2)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) まず，対数の底は e であるから

$$c_1 = \log 1 = 0,\ d_1 = \log e = 1$$

である，また，(1) の α, β に対して，数列 $\{c_n + \alpha d_n\}$ は公比 β の等比数列であるから

$$c_n + \alpha d_n = (c_1 + \alpha d_1)\beta^{n-1} = \alpha \cdot \beta^{n-1}$$

である．$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 4),\ (3,\ 2)$ より

$$c_n + d_n = 4^{n-1} \qquad \cdots\cdots ②$$
$$c_n + 3d_n = 3 \cdot 2^{n-1} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．②, ③ を連立すると

$$c_n = \frac{1}{2}(3 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}) = 3 \cdot 2^{n-2}(2^{n-1} - 1)$$
$$d_n = \frac{1}{2}(3 \cdot 2^{n-1} - 4^{n-1}) = 2^{n-2}(3 - 2^{n-1})$$

$c_n = \log a_n$, $d_n = \log b_n$ より

$$a_n = e^{c_n} = \boldsymbol{e^{3 \cdot 2^{n-2}(2^{n-1}-1)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$b_n = e^{d_n} = \boldsymbol{e^{2^{n-2}(3-2^{n-1})}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．