関数 $f(x)=x^4-2x^2+x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ と 2 点で接する直線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と (1) で求めた直線で囲まれた領域の面積を求めよ．

(16 名古屋市大 経済 6)

【答】

(1) $y=x-1$

(2) $\dfrac{16}{15}$

【解答】

$$f(x)=x^4-2x^2+x$$

(1) 曲線 $y=f(x)$ と 2 点 $x=\alpha,\ x=\beta\ (\alpha<\beta)$ で接する直線の方程式を $y=mx+n$ とおくと

$$(x^4-2x^2+x)-(mx+n)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．両辺を整理すると

$$(\text{左辺})=x^4-2x^2+(1-m)x-n$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2-2\beta x+\beta^2)\\&=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2\end{aligned}$$

① の辺々の係数を比較すると

$$\begin{cases}0=\alpha+\beta\\-2=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2\\1-m=-2\alpha\beta(\alpha+\beta)\\-n=\alpha^2\beta^2\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\beta=0\\(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-2\\m=1+2\alpha\beta(\alpha+\beta)\\n=-\alpha^2\beta^2\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}\alpha+\beta=0 & \cdots\cdots ②\\\alpha\beta=-1 & \cdots\cdots ③\\m=1 & \cdots\cdots ④\\n=-1 & \cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

④, ⑤ から，求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{y=x-1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ②, ③ から，$\alpha,\ \beta$ は

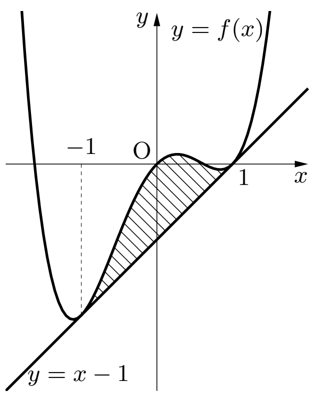
$$t^2-1=0$$

の解であり，$\alpha<\beta$ より

$$\alpha=-1,\ \beta=1$$

である．

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x-1$ で囲まれた領域は右図の斜線部分であり，求める面積は



$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\{(x^4-2x^2+x)-(x-1)\}\,dx\\&=2\int_0^1(x^4-2x^2+1)\quad(\because\ \text{偶関数})\\&=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1\\&=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)\\&=\boldsymbol{\frac{16}{15}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．