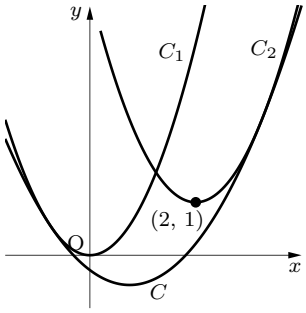
図のように放物線

$$C : y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b \quad (a,\ b \text{ は定数})$$

が 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^2 - 4x + 5$$

に接している．



ここで，2 つの曲線が交点 P で接するとは，P における接線が一致することを意味し，このとき，P を接点という．

このとき，C と C_1 の接点の x 座標は $\dfrac{\boxed{(43)}\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$，$C$ と C_2 の接点の x 座標は $\dfrac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}}$ である．また，3 つの放物線に囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{(51)}\boxed{(52)}}{\boxed{(53)}\boxed{(54)}}$ である．

(16 慶應大 総合政策 4)

【答】

(43)(44)	(45)(46)	(47)(48)	(49)(50)	(51)(52)	(53)(54)
-3	04	13	04	08	03

【解答】

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$$
$$g(x) = x^2$$
$$h(x) = x^2 - 4x + 5$$

とおくと

$$f'(x) = x + a$$
$$g'(x) = 2x$$
$$h'(x) = 2x - 4$$

である．放物線 C が 2 つの放物線 C_1，C_2 に接しているということは，C と C_1，C と C_2 の x 座標をそれぞれ s，t とおくと

$$\begin{cases} f(s) = g(s) \\ f'(s) = g'(s) \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} f(t) = h(t) \\ f'(t) = h'(t) \end{cases}$$

が成り立つということである．すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}s^2 + as + b = s^2 \\ s + a = 2s \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 + at + b = t^2 - 4t + 5 \\ t + a = 2t - 4 \end{cases}$$

であり

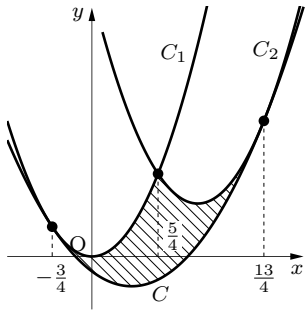
$$\begin{cases} a = s \\ b = -\dfrac{a^2}{2} \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} a = t - 4 \\ b = 5 - \dfrac{1}{2}(a+4)^2 \end{cases}$$

である．b の値に着目すると

$$
\begin{aligned}
&-\frac{a^2}{2}=5-\frac{1}{2}(a+4)^2\\
&a^2=-10+(a+4)^2\\
&0=8a+6\\
&\therefore\quad a=-\frac{3}{4}\qquad\therefore\quad b=-\frac{9}{32},\quad s=\boldsymbol{-\frac{3}{4}},\quad t=\boldsymbol{\frac{13}{4}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．



C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$
\begin{aligned}
&x^2=x^2-4x+5\\
&\therefore\quad x=\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

であり，3 つの放物線に囲まれた部分は右図の斜線部分である．

求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S&=\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}}\left\{x^2-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{9}{32}\right)\right\}dx\\
&\quad+\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{4}}\left\{(x^2-4x+5)-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{9}{32}\right)\right\}dx\\
&=\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}}\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2dx+\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{4}}\frac{1}{2}\left(x-\frac{13}{4}\right)^2dx\\
&=\left[\frac{1}{6}\left(x+\frac{3}{4}\right)^3\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}}+\left[\frac{1}{6}\left(x-\frac{13}{4}\right)^3\right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{4}}\\
&=\frac{1}{6}\{2^3-(-2)^3\}\\
&=\boldsymbol{\frac{8}{3}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．