$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=0$ が成り立つように定数 $a,\ b$ の値を定めよ.

(16 藤田保健衛生大 医 1(6))

【答】 $a=-\sqrt{3},\ b=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解答】

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=0$ が成り立つとき

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b}{x}=0$$

だから

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)=0$$

$$\sqrt{3}+a=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-\sqrt{3}}$$

……(答)

このとき

$$\begin{aligned}
b&=-\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3}x)\\
&=-\lim_{x\sim\infty}\frac{(3x^2+2x+1)-3x^2}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3}x}\\
&=-\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3}x}\\
&=-\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}}\\
&=-\frac{2}{2\sqrt{3}}\\
&=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{3}}
\end{aligned}$$

……(答)

である.