(1) $\dfrac{1}{1+\tan^2 t}$ を $\cos t$ を用いて表すと $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ について，$x=\tan t$ とおいて置換積分法を用いると $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx =$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{(x)'}{1+x^2}\,dx$ と考え，部分積分法を用いると $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．これより $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx =$ $\boxed{\text{エ}}$ が得られる．

(4) 等式 $x(x+1)^2=(ax+b)(x^2+1)+cx+d$ が x についての恒等式となるとき，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値は $a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$，$c=\boxed{\text{キ}}$，$d=\boxed{\text{ク}}$ である．よって，

$$\int_0^1 \frac{x(1+x)^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 \left\{\frac{ax+b}{1+x^2}+\frac{cx+d}{(1+x^2)^2}\right\}dx = \boxed{\text{ケ}}$$

である．

(16 東海大 医 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
$\cos^2 t$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi-2}{8}$	$\dfrac{\pi+2}{8}$	1	2	0	-2	$\dfrac{1}{2}\log 2+\dfrac{\pi-2}{4}$

【解答】

(1) 等式 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ の辺々を $\cos^2 t$ で割ると

$$(\tan^2 t)+1=\frac{1}{\cos^2 t} \qquad \therefore \quad \frac{1}{1+\tan^2 t}=\cos^2 t$$

である．

(2) $x=\tan t$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2 t}\,dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline t & 0 & \longrightarrow & \dfrac{\pi}{4} \end{array}$$

であるから

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{(x)'}{1+x^2}\,dx$ と考え，部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2}(-2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}+2\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx\end{aligned}$$

左辺に (2) の結果を代入すると

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+2\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi-2}{8}} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．これより

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi-2}{8} \quad (\because\ ①,\ ②) \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi+2}{8}} \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) 等式 $x(x+1)^2 = (ax+b)(x^2+1)+cx+d$，すなわち

$$x^3+2x^2+x = ax^3+bx^2+(a+c)x+(b+d)$$

は x についての恒等式だから

$$\begin{cases} 1 = a \\ 2 = b \\ 1 = a+c \\ 0 = b+d \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a=1,\ b=2,\ c=0,\ d=-2}$$

……(答)

である．よって

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{x(1+x)^2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{(x+2)(x^2+1)-2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{x+2}{1+x^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1 + 2\cdot\frac{\pi}{4} - 2\cdot\frac{\pi+2}{8} \quad (\because\ ①,\ ③) \\ &= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi+2}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi-2}{4}} \end{aligned}$$

……(答)

である．