媒介変数表示された曲線と面積

関数 $y=f(x)$ のグラフが媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x=\sin\theta-\theta\cos\theta \\ y=\cos\theta+\theta\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表されている．

(1) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\,d\theta$ および $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos 2\theta\,d\theta$ を計算せよ．

(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸，および 2 直線 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(16 室蘭工大 2)

【答】

(1) 極大値 $\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos 2\theta\,d\theta=-\frac{\pi}{4}$

(3) $S=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi^3}{48}$

【解答】

(1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ において

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta-(1\cdot\cos\theta-\theta\sin\theta)=\theta\sin\theta\ (\geqq 0)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta+(1\cdot\sin\theta+\theta\cos\theta)=\theta\cos\theta$$

であり，$0<\theta<\pi$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

であり，$f'(x)$ の符号は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において正から負に変わる．

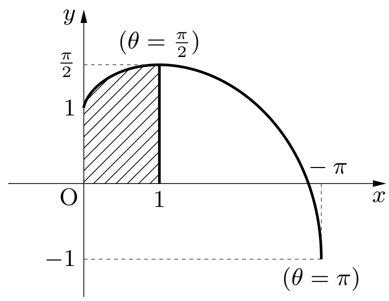
したがって，$f(x)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$x=1$ のとき **極大値 $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$** をとる．……(答)

(2) 部分積分法により

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\,d\theta &= \left[\theta\cdot\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}+\left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$ ……(答)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos 2\theta \, d\theta = \left[\theta^2 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\theta \cdot \frac{\sin 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 2\theta \, d\theta$$
$$= -\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \quad (\because \text{ 上式}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸，および 2 直線 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた図形は右図の斜線部分であり，面積 S は



$$S = \int_0^1 y \, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \theta \sin\theta) \cdot \theta \sin\theta \, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\theta \sin 2\theta + \theta^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4} + \left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (\because (2))$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{48}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $y = f(x)$ のグラフは，円 $x^2 + y^2 = 1$ の伸開線である．