次の問に答えよ．

(1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ を求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y=\dfrac{3}{2}\tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(16 佐賀大 理工 2)

【答】

(1) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$ （C は積分定数）

(2) $\dfrac{5}{8}\sqrt{3}\pi - \dfrac{5}{24}\pi^2$

【解答】

(1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから

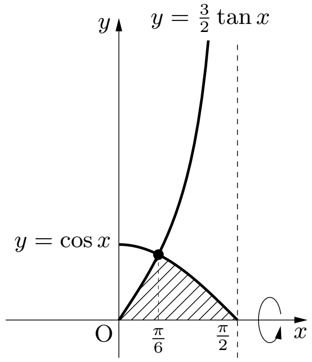
$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\ &= \boldsymbol{\tan x - x + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) 2 つの曲線

$$y=\frac{3}{2}\tan x \ \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y=\cos x \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

の交点の x 座標を求める．$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると



$$\frac{3}{2}\tan x = \cos x \iff 3\sin x = 2(1-\sin^2 x)$$
$$\therefore\quad 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$
$$\therefore\quad (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$
$$\therefore\quad \sin x = \frac{1}{2} \qquad \therefore\quad x = \frac{\pi}{6}$$

であり，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \pi\left(\frac{3}{2}\tan x\right)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos^2 x\,dx \\ &= \frac{9}{4}\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\,dx + \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \frac{9}{4}\pi\Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (\because\ (1)) \\ &= \frac{9}{4}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} \\ &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\pi - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\pi^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{8}\sqrt{3}\pi - \frac{5}{24}\pi^2}\end{aligned}$$ ……(答)

である．