$y>0$ とするとき，不等式

$$y^{\frac{2}{x}}+y^{-\frac{2}{x}}-6(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}})+10\leqq 0$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $X=y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}$ とするとき，この不等式を，X を用いて表せ．

(2) この不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の全体が表す図形を座標平面上に図示せよ．

(16 宮崎大 工・医 3)

【答】

(1) $X^2-6X+8\leqq 0$

(2) 略

【解答】

$$y^{\frac{2}{x}}+y^{-\frac{2}{x}}-6(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}})+10\leqq 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $X=y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}$ とすると

$$\begin{aligned} y^{\frac{2}{x}}+y^{-\frac{2}{x}} &= (y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}})^2-2y^{\frac{1}{x}}y^{-\frac{1}{x}} \\ &= (y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}})^2-2 \\ &= X^2-2 \end{aligned}$$

となるから，不等式 $(*)$ は X を用いて

$$(X^2-2)-6X+10\leqq 0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{X^2-6X+8\leqq 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

と表される．

(2) (1) の不等式を解くと

$$(X-2)(X-4)\leqq 0$$

$$\therefore\quad 2\leqq X\leqq 4$$

である．$x,\ y$ で表すと

$$\begin{cases} y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}\geqq 2 \\ y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}\leqq 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (y^{\frac{1}{x}})^2-2y^{\frac{1}{x}}+1\geqq 0 \\ (y^{\frac{1}{x}})^2-4y^{\frac{1}{x}}+1\leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (y^{\frac{1}{x}}-1)^2\geqq 0 & \cdots\cdots ① \\ 2-\sqrt{3}\leqq y^{\frac{1}{x}}\leqq 2+\sqrt{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①はつねに成りたつから

$$(*) \iff ②$$

である．指数が $\dfrac{1}{x}$ であることより，$x\neq 0$ である．② の各辺を x 乗すると

$x>0$ のとき，$(2-\sqrt{3})^x\leqq y\leqq (2+\sqrt{3})^x$

$x<0$ のとき，$(2-\sqrt{3})^x\geqq y\geqq (2+\sqrt{3})^x$

底について $0<2-\sqrt{3}<1<2+\sqrt{3}$ であることにも注意すると，点 $(x,\ y)$ の全体が表す図形は右図の斜線部分となる．境界は点 $(0,\ 1)$ のみ除く．