$\begin{cases} 2\sin\alpha + 2\cos\beta = 1 \\ 2\cos\alpha - 2\sin\beta = \sqrt{3} \end{cases}$ とする．このとき，α と β を求めよ．ただし，$0 \leqq \alpha < 2\pi$ かつ $0 \leqq \beta < 2\pi$ とする．

(16 山梨大 教育人間科学・生命環境 1(3))

【答】 $(\alpha,\ \beta) = \left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{4}{3}\pi\right),\ \left(\dfrac{11}{6}\pi,\ 0\right)$

【解答】

$$\begin{cases} 2\sin\alpha + 2\cos\beta = 1 \\ 2\cos\alpha - 2\sin\beta = \sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{1}{2} - \sin\alpha \\ \sin\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha \end{cases}$$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ から

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} - \sin\alpha\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha\right)^2 = 1 \\ \iff &\left(\frac{1}{4} - \sin\alpha + \sin^2\alpha\right) + \left(\frac{3}{4} - \sqrt{3}\cos\alpha + \cos^2\alpha\right) = 1 \\ \iff &\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 1 \\ \iff &\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\because\ \text{合成の公式}) \end{aligned}$$

$0 \leqq \alpha < 2\pi$ より $\dfrac{\pi}{3} \leqq \alpha + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$ なので

$$\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi$$

$0 \leqq \beta < 2\pi$ より，β は

(i) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{cases} \cos\beta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \beta = \frac{4}{3}\pi$$

(ii) $\alpha = \dfrac{11}{6}\pi$ のとき

$$\begin{cases} \cos\beta = 1 \\ \sin\beta = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \beta = 0$$

以上 (i)，(ii) から

$$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta) = \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi\right),\ \left(\frac{11}{6}\pi,\ 0\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．