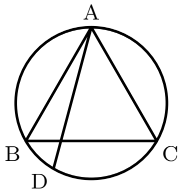
一辺の長さが 5 である正三角形 ABC とその外接円がある．図のように，点 D を直線 BC に関して点 A と異なる側で AD = 6 となるようにとる．このとき，線分 BD + CD の長さを求めよ．

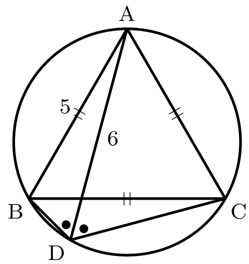


(16 奈良県医大 医 10)

【答】 6

【解答】

(解 1) $\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADC} = 60^\circ$ に注意して，$\triangle\mathrm{ABD}$，$\triangle\mathrm{ACD}$ において余弦定理を用いると



$$5^2 = \mathrm{BD}^2 + 6^2 - 2\cdot\mathrm{BD}\cdot 6\cos 60^\circ$$
$$5^2 = \mathrm{CD}^2 + 6^2 - 2\cdot\mathrm{CD}\cdot 6\cos 60^\circ$$

辺々ごとに引くと

$$0 = \mathrm{BD}^2 - \mathrm{CD}^2 - 6(\mathrm{BD} - \mathrm{CD})$$
$$(\mathrm{BD} - \mathrm{CD})(\mathrm{BD} + \mathrm{CD} - 6) = 0$$

ここで，BD = CD とすると $\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{ACD}$ であり，AD は正三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の直径となる．正弦定理より

$$(\text{直径}) = \frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}} \fallingdotseq 6\ (= \mathrm{AD})$$

である．したがって，$\mathrm{BD} \fallingdotseq \mathrm{CD}$ であり

$$\mathrm{BD} + \mathrm{CD} - 6 = 0$$
$$\therefore\quad \mathrm{BD} + \mathrm{CD} = \mathbf{6}$$

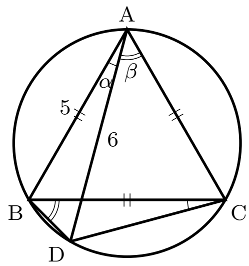
……(答)

(解 2) $\angle\mathrm{BAD} = \alpha$，$\angle\mathrm{DAC} = \beta$ とおくと

$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

である．円周角の定理より

$$\angle\mathrm{BCD} = \alpha,\quad \angle\mathrm{DBC} = \beta$$



である．$\triangle\mathrm{ABD}$ において正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{AD}}{\sin(\beta + 60^\circ)}$$
$$\therefore\quad \mathrm{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta + 60^\circ)}\mathrm{AD}$$

$\triangle\mathrm{ACD}$ において正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{DC}}{\sin\beta} = \frac{\mathrm{AD}}{\sin(\alpha + 60^\circ)}$$
$$\therefore\quad \mathrm{DC} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + 60^\circ)}\mathrm{AD}$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{BD} + \mathrm{CD} &= \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta + 60^\circ)}\mathrm{AD} + \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + 60^\circ)}\mathrm{AD}\\ &= \frac{\sin(\alpha + 60^\circ)\sin\alpha + \sin(\beta + 60^\circ)\sin\beta}{\sin(\alpha + 60^\circ)\sin(\beta + 60^\circ)}\mathrm{AD}\end{aligned}$$

積和の公式 $\sin A \sin B = -\dfrac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}$ を用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{BD}+\mathrm{CD} &= \frac{-\dfrac{1}{2}\{\cos(2\alpha+60^\circ)-\cos 60^\circ\} - \dfrac{1}{2}\{\cos(2\beta+60^\circ)-\cos 60^\circ\}}{-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta+120^\circ)-\cos(\alpha-\beta)\}}\mathrm{AD} \\
&= \frac{\cos(2\alpha+60^\circ)+\cos(2\beta+60^\circ)-1}{-1-\cos(\alpha-\beta)}\mathrm{AD}
\end{aligned}$$

和積の公式 $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{BD}+\mathrm{CD} &= \frac{2\cos(\alpha+\beta+60^\circ)\cos(\alpha-\beta)-1}{-1-\cos(\alpha-\beta)}\mathrm{AD} \\
&= \frac{-\cos(\alpha-\beta)-1}{-1-\cos(\alpha-\beta)}\mathrm{AD} \\
&= \mathrm{AD} = 6
\end{aligned}$$

- $(60^\circ+\alpha)+(60^\circ+\beta)=180^\circ$ に気づけば，$\sin(60^\circ+\alpha)=\sin(60^\circ+\beta)$ であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{BD}+\mathrm{CD} &= \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+60^\circ)}\mathrm{AD} + \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+60^\circ)}\mathrm{AD} \\
&= \frac{\sin\alpha+\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin(\alpha+60^\circ)}\mathrm{AD} \\
&= \frac{\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\alpha}{\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}\mathrm{AD} \\
&= \frac{\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}{\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}\mathrm{AD} \\
&= \mathrm{AD} = 6
\end{aligned}$$

- 上の計算から $\mathrm{AD}=6$ のときに限らず，$\mathrm{BD}+\mathrm{CD}=\mathrm{AD}$ であることが分かる．

(解 3) 右図のように，$\mathrm{DE}=\mathrm{BD}$ となるように点 E を線分 AD 上にとると

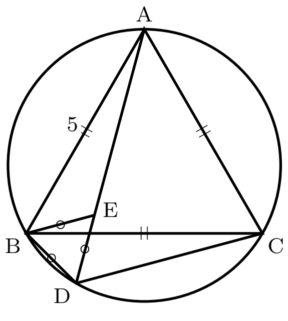
$$\angle\mathrm{BDE}=\angle\mathrm{BDA}=\angle\mathrm{BCE}=60^\circ$$

であり，$\triangle\mathrm{BDE}$ は正三角形である．これより

$$\angle\mathrm{DBC}=60^\circ-\angle\mathrm{CBE}=\angle\mathrm{EBA}$$

であり

$$\triangle\mathrm{BDC}\equiv\triangle\mathrm{BEA}$$
$$\mathrm{BD}+\mathrm{DC}=\mathrm{DE}+\mathrm{EA}=\mathrm{AD}=6$$



(解 4) 円に内接する四角形 ABDC において

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CA}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}$$

が成り立つ (トレミーの定理).

これを用いると

$$5\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BD}\cdot 5=\mathrm{AD}\cdot 5$$
$$\therefore\quad \mathrm{CD}+\mathrm{BD}=\mathrm{AD}=6$$