正四面体 ABCD がある．辺 BC 上に点 P を，$\mathrm{BP}=x$ となるようにとる．辺 CD 上に点 Q を，$\mathrm{CQ}=3-x$ となるようにとる．ただし，$0<x<3$ とする．頂点 A から三角形 BCD に下ろした垂線を AH とする．$\mathrm{AH}=\sqrt{6}$ とする．

(1) 正四面体 ABCD の一辺の長さを求めよ．

(2) $\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QA}^2$ の値が最小となるような x の値を求めよ．

(3) 正四面体 ABCD に外接する球の中心を O とする．このとき．

$$\mathrm{AO}:\mathrm{OH}=3:1$$

であることを示せ．

(16 青森公立大 4)

【答】

(1) 3

(2) $x=2$

(3) 略

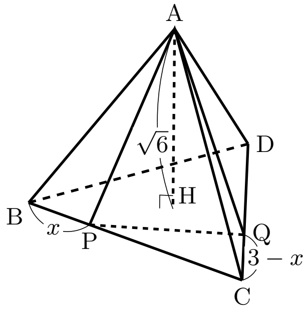
【解答】

(1) 頂点 A から三角形 BCD に下ろした垂線の足 H は正三角形 BCD の外心かつ重心である．

正四面体 ABCD の一辺の長さを $l\ (>0)$ とおくと

$$\mathrm{BH}=\frac{2}{3}\times l\sin 60^\circ=\frac{l}{\sqrt{3}}$$

である．$\mathrm{AH}=\sqrt{6}$ より直角三角形 ABH で三平方の定理を用いると



$$\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2+(\sqrt{6})^2=l^2$$

$$\frac{2}{3}l^2=6$$

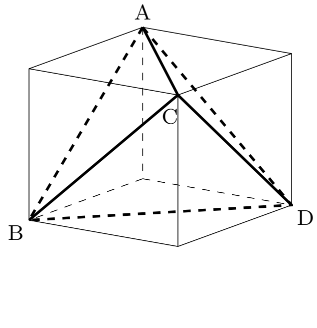
$$\therefore\quad l=\mathbf{3}$$

……(答)

である．

- 正四面体 ABCD の一辺の長さを $l\ (>0)$ とおくと，右図の立方体の一辺の長さは $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ である．

  立方体における正四面体 ABCD の体積は



$$\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^3-4\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{l^3}{6\sqrt{2}}$$

である．また，正四面体 ABCD において $\mathrm{AH}=\sqrt{6}$ であるから

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l^2\sin 60^\circ\cdot\sqrt{6}=\frac{l^2}{2\sqrt{2}}$$

である．よって

$$\frac{l^3}{6\sqrt{2}}=\frac{l^2}{2\sqrt{2}}\qquad\therefore\quad l=3$$

である．

(2) $l=3$ より

$$\mathrm{PC}=l-x=3-x,\ \angle\mathrm{PCQ}=60^\circ$$

であるから，△PCQ は正三角形であり

$$\mathrm{PQ}=3-x$$

である．また

$$\mathrm{DQ}=l-(3-x)=x=\mathrm{BP},\ \mathrm{AB}=\mathrm{AD}(=3),\ \angle\mathrm{QDA}=\angle\mathrm{PBA}(=60^\circ)$$

であるから，$\triangle\mathrm{QDA}\equiv\triangle\mathrm{PBA}$ であり

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=\sqrt{x^2+3^2-2\cdot x\cdot 3\cos 60^\circ}=\sqrt{x^2-3x+9}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QA}^2&=(x^2-3x+9)+(3-x)^2+(x^2-3x+9)\\&=3x^2-12x+27\\&=3(x-2)^2+15\end{aligned}$$

$0<x<3$ より，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QA}^2$ の値が最小となるような x の値は

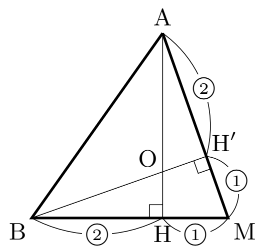
$$\boldsymbol{x=2}$$ ……(答)

である．

(3) O は正四面体 ABCD に外接する球の中心であるから，OB = OC = OD であり，O から三角形 BCD に下ろした垂線の足は △BCD の外心であり，(1) の H と一致する．したがって，O は AH 上の点である．

B から三角形 CDA に下した垂線の足を H′ とおくと，同じく，H′ は正三角形 ACD の外心かつ重心であり，O は BH′ 上の点である．

CD の中点を M とおくと，四面体 ABCD の平面 ABM による切り口は右図となる．



△AMH と直線 BH についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OH}}\cdot\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{BM}}\cdot\frac{\mathrm{MH'}}{\mathrm{H'A}}=1$$

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OH}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore\quad \mathrm{AO}:\mathrm{OH}=3:1$$

である． ……(証明終わり)

- 外接球の半径を R とおくと，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=R$ である．

$$\mathrm{BH}=\frac{l}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

であるから，OH の長さに着目すると

$$\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{BH}^2}=\mathrm{AH}-\mathrm{OA}$$

$$R^2-(\sqrt{3})^2=(\sqrt{6}-R)^2$$

$$-3=6-2\sqrt{6}R$$

$$\therefore\quad R=\frac{9}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$$

である．よって

$$\mathrm{AO}:\mathrm{OH}=R:(\sqrt{6}-R)=\frac{3\sqrt{6}}{4}:\left(\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{4}:\frac{\sqrt{6}}{4}=3:1$$

である．