$a+b=1,\ a^2+b^2=3$ のとき a^7+b^7 の値を求めよ．

(17 昭和大 医 4(1))

【答】 29

【解答】

$a+b=1$ の辺々を平方すると

$$a^2+2ab+b^2=1$$

$a^2+b^2=3$ より

$$3+2ab=1$$
$$\therefore\quad ab=\frac{1-3}{2}=-1$$

であるから

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2)-ab(a+b)=1\cdot 3-(-1)\cdot 1=4$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=3^2-2\cdot(-1)^2=7$$

よって

$$\begin{aligned} a^7+b^7&=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-a^3b^3(a+b)\\ &=4\cdot 7-(-1)^3\cdot 1\\ &=\mathbf{29} \end{aligned}$$

……(答)

- 一般化しておく．

$$a^{n+2}+b^{n+2}=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n)$$

$a+b=1,\ ab=-1$ であるから，$p_n=a^n+b^n$ とおくと

$$p_{n+2}=1\cdot p_{n+1}-(-1)\cdot p_n$$
$$\therefore\quad p_{n+2}=p_{n+1}+p_n$$

$p_1=1,\ p_2=3$ より，順に計算していくと

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	3	4	7	11	18	29

$$\therefore\quad a^7+b^7=29$$