

$z^4 = 1$ を満たす複素数をすべて求めなさい。

(17 福島大 理工 1(2))

【答】 $\pm 1, \pm i$

【解答】

$$z^4 = 1 \quad \dots\dots (*)$$

(*) を因数分解すると

$$z^4 - 1 = 0$$

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$(z + 1)(z - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$\therefore z = \pm 1, \pm i \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (*) より $z \neq 0$ であり, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) と表すことができる.
(*) を極形式で表すと

$$(*) \iff r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\iff \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, 3) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} z &= \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ &= 1, i, -1, -i \end{aligned}$$

である。