a を定数として，次の関数

$$f(x)=x^2-2ax+2a$$

を考える．ただし，定義域を $0\leqq x\leqq 2$ とする．$f(x)$ の最小値を m とする．

(1) m を a を用いて表せ．

(2) m を最大にするような a の値，およびそのときの m の値を求めよ．

(17 青森公立大 2)

【答】

(1) $m=\begin{cases}2a & (a\leqq 0 \text{ のとき})\\ -a^2+2a & (0\leqq a\leqq 2 \text{ のとき})\\ 4-2a & (2\leqq a \text{ のとき})\end{cases}$

(2) $a=1$ のとき，最大値 1

【解答】

$$f(x)=x^2-2ax+2a\quad(0\leqq x\leqq 2)$$

(1)
$$f(x)=(x-a)^2-a^2+2a$$

定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の内に軸 $x=a$ があるか否かで場合分けしながら，$f(x)$ の最小値 m を求める．$y=f(x)$ のグラフは下に凸であるから

(i) $a\leqq 0$ のとき

$$m=f(0)=2a$$

である．

(ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき

$$m=f(a)=-a^2+2a$$

である．

(iii) $2\leqq a$ のとき

$$m=f(2)=4-2a$$

である．

以上 (i)(ii)(iii) より

$$\boldsymbol{m=\begin{cases}2a & (a\leqq 0 \text{ のとき})\\ -a^2+2a & (0\leqq a\leqq 2 \text{ のとき})\\ 4-2a & (2\leqq a \text{ のとき})\end{cases}}$$ ……(答)

である．

(2) (1) の m を am 平面に図示すると右図となる．

m は

$a=1$ のとき，最大値 1 ……(答)

をとる．