

x, y を自然数とするとき、 $2x^2 + xy - 5x - y^2 + y - 30 = 0$ であるような組 (x, y) をすべて求めよ。

(17 京都府大 生命環境 (生命・森林) 1(2))

【答】 $(x, y) = (12, 22), (7, 11), (5, 5), (5, 1)$

【解答】

与式の 2 次の項を因数分解すると

$$(2x - y)(x + y) - 5x + y - 30 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$X = 2x - y, Y = x + y$ とおくと

$$x = \frac{X + Y}{3}, \quad y = \frac{2Y - X}{3}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は

$$XY - 5 \frac{X + Y}{3} + \frac{2Y - X}{3} - 30 = 0$$

$$XY - 2X - Y - 30 = 0$$

$$X(Y - 2) - (Y - 2) = 32$$

$$(X - 1)(Y - 2) = 32 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

x, y は自然数より、 X, Y は整数で $Y \geq 2$ である。 $\textcircled{2}$ を満たす組 (X, Y) は

$X - 1$	1	2	4	8	16	32
$Y - 2$	32	16	8	4	2	1

であるから

X	2	3	5	9	17	33
Y	34	18	10	6	4	3

x, y について解くと

$x = \frac{X + Y}{3}$	12	7	5	5	7	12
$y = \frac{2Y - X}{3}$	22	11	5	1	-3	-9

よって、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数の組 (x, y) は

$$(x, y) = (12, 22), (7, 11), (5, 5), (5, 1)$$

……(答)

- 平方完成することにより、 $\textcircled{2}$ を導くこともできる。

$$2x^2 + xy - 5x - y^2 + y - 30 = 0$$

$$\therefore 2x^2 + (y - 5)x - y^2 + y - 30 = 0$$

$$\therefore 2 \left(x + \frac{y - 5}{4} \right)^2 - \frac{(y - 5)^2}{8} - y^2 + y - 30 = 0$$

$$\therefore 2 \left(x + \frac{y - 5}{4} \right)^2 - \frac{9}{8}y^2 + \frac{9}{4}y - \frac{265}{8} = 0$$

次に、 y について平方完成すると

$$2\left(x + \frac{y-5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}(y-1)^2 + \frac{9}{8} - \frac{265}{8} = 0$$

分母を払って整理すると

$$(4x + y - 5)^2 - (3y - 3)^2 = 256$$

$$\therefore (4x + 4y - 8)(4x - 2y - 2) = 256$$

$$\therefore (x + y - 2)(2x - y - 1) = 32$$

② が得られた。

- 与式を x についての方程式とみる。

$$2x^2 + (y-5)x - (y^2 - y + 30) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (y-5)^2 + 4 \cdot 2 \cdot (y^2 - y + 30) \\ &= 9y^2 - 18y + 265 \\ &= 9(y-1)^2 + 256 \end{aligned}$$

x, y が自然数のとき、 D は平方数であることが必要だから

$$9(y-1)^2 + 256 = n^2 \quad (n \text{ は自然数})$$

とおけて

$$n^2 - \{3y-3\}^2 = 256 = 2^8$$

$$(n+3y-3)(n-3y+3) = 2^8$$

$n+3y-3, n-3y+3$ はともに整数である。さらに

$$n+3y-3 \geq n-3y+3$$

かつ

$$(n+3y-3) + (n-3y+3) = 2n (= \text{偶数})$$

であるから、 $n+3y-3$ と $n-3y+3$ の偶奇は一致する。このことに注意すると

$n+3y-3$	128	64	32	16
$n-3y+3$	2	4	8	16

したがって

n	65	34	20	16
y	22	11	5	1

⑦のとき、 $x = \frac{-(y-5) \pm \sqrt{D}}{4} = \frac{-y+5 \pm n}{4}$ だから

$$y=22 \text{ のとき, } x = \frac{-17 \pm 65}{4} \text{ となり } x=12 \left(x = -\frac{41}{2} \text{ は不適} \right)$$

$$y=11 \text{ のとき, } x = \frac{-6 \pm 34}{4} \text{ となり } x=7 \left(x = -10 \text{ は不適} \right)$$

$$y=5 \text{ のとき, } x = \frac{0 \pm 20}{4} \text{ となり } x=5 \left(x = -5 \text{ は不適} \right)$$

$y = 1$ のとき, $x = \frac{4 \pm 16}{4}$ となり $x = 5$ ($x = -3$ は不適)

以上より,

$$(x, y) = (12, 22), (7, 11), (5, 5), (5, 1)$$