自然数の 2 乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 $a,\ n,\ k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

(17 北海道大 理 1)

【答】

(1) 略

(2) $n=1,\ 13$

【解答】

(1) $n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=k^2+(2k-1)n$$

$n,\ k$ は自然数より，$n \geqq 1$，$2k-1 \geqq 1>0$ であり

$$a \geqq k^2+(2k-1)\cdot 1=k^2+2k-1$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるとき，$n(n+1)+14>n^2$ より

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

となる自然数 k が存在する．(1) より

$$14 \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つ．

$$k^2+2k-15 \leqq 0 \qquad \therefore \quad (k+5)(k-3) \leqq 0$$

k は自然数より

$$k=1,\ 2,\ 3$$

であり，① を n について解くと

$$14=k^2+(2k-1)n \qquad \therefore \quad n=\frac{14-k^2}{2k-1}$$

である．

(i) $k=1$ のとき

$$n=\frac{14-1^2}{2\cdot 1-1}=13 \qquad \text{適する．}$$

(ii) $k=2$ のとき

$$n=\frac{14-2^2}{2\cdot 2-1}=\frac{10}{3} \qquad \text{適さない．}$$

(iii) $k=3$ のとき

$$n=\frac{14-3^2}{2\cdot 3-1}=1 \qquad \text{適する．}$$

以上より，求める自然数 n は

$$\boldsymbol{n = 1,\ 13} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である

- (1) を無視して，(2) を解くこともできる．

$$n(n+1) + 14 = m^2 \ (m \text{ は自然数}) \qquad \cdots\cdots ㋐$$

となる自然数 n を求める．

$$\begin{aligned} ㋐ &\iff 4n(n+1) + 56 = 4m^2 \\ &\iff (2n+1)^2 + 55 = 4m^2 \\ &\iff 4m^2 - (2n+1)^2 = 55 \\ &\iff (2m+2n+1)(2m-2n-1) = 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

ここで，$2m+2n+1 > 0,\ 2m+2n+1 > 2m-2n-1$ に注意すると

$$\begin{aligned} &(2m+2n+1,\ 2m-2n-1) = (55,\ 1),\ (11,\ 5) \\ \iff &(m+n,\ m-n) = (27,\ 1),\ (5,\ 3) \\ \therefore\ &(m,\ n) = (14,\ 13),\ (4,\ 1) \end{aligned}$$

よって　　$n = 1,\ 13$