S を $a+b\sqrt{2}$ (但し $a,\ b$ は整数) の形に表される数すべての集合とする．S に属する任意の数 $z=a+b\sqrt{2}$ (但し $a,\ b$ は整数) に対して，$N(z)=a^2-2b^2$ とおく．

(1) S に属する任意の数 $z,\ w$ に対して，$z+w\in S$，$zw\in S$ かつ $N(zw)=N(z)N(w)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) S に属する零でない数 $z=x+y\sqrt{2}$ ($x,\ y$ は整数) の逆数 z^{-1} が S に属する為の必要十分条件は，$x^2-2y^2=1,\ -1$ であることを証明せよ．

(3) $1<z<1+\sqrt{2}$ を満たすような S の数 z で，その逆数 z^{-1} も S に属するものは存在しないことを証明せよ．

(4) S に属する零でない数 z で，その逆数 z^{-1} も S に属するものはすべて $(1+\sqrt{2})^n,\ -(1+\sqrt{2})^n$ (n は整数) によって与えられることを証明せよ．

(17 奈良県医大 後 医 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

【解答】

$$S=\left\{a+b\sqrt{2}\ \middle|\ a,\ b\text{ は整数}\right\}$$

$z=a+b\sqrt{2}\in S$ に対して，　$N(z)=a^2-2b^2$

(1) $z\in S,\ w\in S$ に対し

$$z=a+b\sqrt{2},\ w=c+d\sqrt{2}$$

となる整数 $a,\ b,\ c,\ d$ が存在する．このとき

$$z+w=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$zw=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

$a+c,\ b+d,\ ac+2bd,\ ad+bc$ は整数であるから

$$z+w\in S,\quad zw\in S$$ ……(証明終わり)

である．また

$$\begin{aligned}N(zw)&=(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2\\&=(a^2c^2+4abcd+4b^2d^2)-2(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)\\&=a^2c^2+4b^2d^2-2a^2d^2-2b^2c^2\\&=a^2(c^2-2d^2)-2b^2(c^2-2d^2)\\&=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)\\&=N(z)N(w)\end{aligned}$$ ……(証明終わり)

(2) $z = x + y\sqrt{2}$ が「$z \in S$ かつ $z \neq 0$」であるとき

$$「z^{-1} \in S \iff x^2 - 2y^2 = \pm 1」$$

であること，すなわち「$x,\ y$ は同時には 0 でない整数」であるとき

$$「z^{-1} \in S \iff N(z) = \pm 1」 \qquad \cdots\cdots (*)$$

であることを示す．

$\Longrightarrow$ の証明；$z^{-1} \in S$ ならば

$$\begin{aligned} N(z)N(z^{-1}) &= N(zz^{-1}) \quad (\because\ (1)) \\ &= N(1) = 1 \end{aligned}$$

$N(z)$，$N(z^{-1})$ は整数だから，$N(z) = \pm 1$ である．

$\Longleftarrow$ の証明；$N(z) = \pm 1$ ならば

$$z^{-1} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = \frac{x - y\sqrt{2}}{N(z)} = \pm(x - y\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots ①$$

$\pm x$，$\mp y$ は整数であるから，$z^{-1} \in S$ である．

よって，$(*)$ は示された． ……(証明終わり)

(3) 背理法を用いる．

$1 < z < 1 + \sqrt{2}$ …… ② を満たす $z \in S$ で，$z^{-1} \in S$ となる z が存在すると仮定する．この z を $z = x + y\sqrt{2}$ ($x,\ y$ は整数) とすると，① より

$$z^{-1} = x - y\sqrt{2} \ \text{ または } \ -(x - y\sqrt{2})$$

z^{-1} の範囲を調べる．$zz^{-1} = 1$ かつ $z > 0$ より $z^{-1} > 0$ であり，② の各辺に z^{-1} を掛けると

$$\begin{aligned} & z^{-1} < 1 < (1 + \sqrt{2})z^{-1} \\ \therefore\ & \frac{1}{1 + \sqrt{2}} < z^{-1} < 1 \\ \therefore\ & \sqrt{2} - 1 < z^{-1} < 1 \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

②，③より

$$\begin{aligned} & 1 - 1 < z - z^{-1} < (1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) \\ & 0 < z - z^{-1} < 2 \qquad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

(i) $z^{-1} = x - y\sqrt{2}$ のとき

$z - z^{-1} = 2 \cdot y\sqrt{2}$ であり，④は

$$0 < 2\sqrt{2}y < 2 \qquad \therefore\ \ 0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを満たす整数 y は存在しない．

(ii) $z^{-1} = -(x - y\sqrt{2})$ のとき

$z - z^{-1} = 2 \cdot x$ であり，④は

$$0 < 2x < 2 \quad \therefore\ \ 0 < x < 1$$

これを満たす整数 x は存在しない．

以上 (i)，(ii) より，$1 < z < 1 + \sqrt{2}$ を満たす $z \in S$ で，$z^{-1} \in S$ となる z は存在しない． ……(証明終わり)

- ④ に対応する不等式を $z+z^{-1}$ で考えてもよい (手数はふえる)．②，③より

$$1+(\sqrt{2}-1)<z+z^{-1}<(1+\sqrt{2})+1$$
$$\sqrt{2}<z+z^{-1}<2+\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ④'$$

(i) $z^{-1}=x-y\sqrt{2}$ のとき
$z+z^{-1}=2\cdot x$ であり，④′ は

$$\sqrt{2}<2x<2+\sqrt{2} \qquad \therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{2}<x<1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x は整数であるから，$x=1$ である．このとき，$zz^{-1}=1$ を解くと

$$(1+y\sqrt{2})(1-y\sqrt{2})=1 \qquad \therefore \quad 1-2y^2=1 \qquad \therefore \quad y=0$$

$z=1$ となり z は ② を満たさない．

(ii) $z^{-1}=-(x-y\sqrt{2})$ のとき
$z+z^{-1}=2\cdot y\sqrt{2}$ であり，④′ は

$$\sqrt{2}<2\sqrt{2}y<2+\sqrt{2} \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}<y<\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

y は整数であるから，$y=1$ である．このとき，$zz^{-1}=1$ を解くと

$$(x+\sqrt{2})(-x+\sqrt{2})=1 \qquad \therefore \quad -x^2+2=1 \qquad \therefore \quad x=\pm 1$$

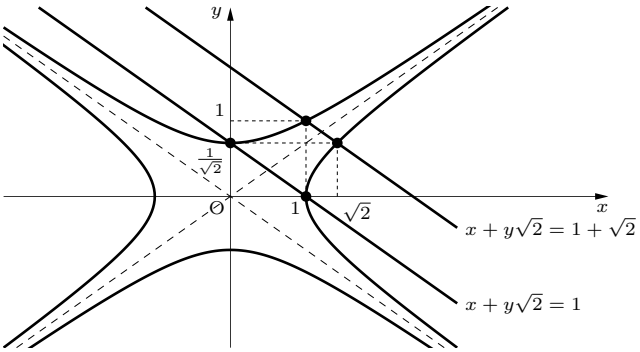
$z=\pm 1+\sqrt{2}$ となり z は ② を満たさない．

以上より，$1<z<1+\sqrt{2}$ を満たす $z\in S$ で，$z^{-1}\in S$ となる z は存在しない．

- $x+y\sqrt{2}=1$，$x+y\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$ と $x^2-2y^2=\pm 1$ の交点を求めると

$$\begin{cases} x+y\sqrt{2}=1 \\ x^2-2y^2=\pm 1 \end{cases} \quad \text{より} \quad (1,\ 0),\ \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{cases} x+y\sqrt{2}=1+\sqrt{2} \\ x^2-2y^2=\pm 1 \end{cases} \quad \text{より} \quad (1,\ 1),\ \left(\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



これらを図示すると，上図のようになるから

$$\begin{cases} 1<x+y\sqrt{2}<1+\sqrt{2} \\ x^2-2y^2=\pm 1 \end{cases}$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は存在しない．

(4) $z \neq 0$ のとき,「$z \in S,\ z^{-1} \in S$ ならば，$z = (1+\sqrt{2})^n$ または $-(1+\sqrt{2})^n$ (n は整数) と表すことができる」 …… $(**)$ ことを示す.

$z \in S$ かつ $z^{-1} \in S$ とすると，$-z \in S$ かつ $(-z)^{-1} = -z^{-1} \in S$ であるから，$(**)$ を示すには,「$z \in S,\ z^{-1} \in S$，$z > 0$ ならば，$z = (1+\sqrt{2})^n$ (n は整数) と表すことができる」 …… $(**)'$ ことを示せばよい.

背理法を用いる．$z \in S,\ z^{-1} \in S,\ z > 0$ であり，$z = (1+\sqrt{2})^n$ でない z が存在すると仮定する.

$$(1+\sqrt{2})^m < z < (1+\sqrt{2})^{m+1}$$

を満たす整数 m が存在する．各辺に $(1+\sqrt{2})^m$ の逆数 $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^m = (\sqrt{2}-1)^m$ をかけると

$$1 < z(\sqrt{2}-1)^m < 1+\sqrt{2}$$

$z' = z(\sqrt{2}-1)^m$ とおくと，$z \in S,\ (\sqrt{2}-1)^m \in S$ であるから，(1) より

$$z' \in S$$

である．また

$$z' \times \left\{z^{-1}(\sqrt{2}+1)^m\right\} = zz^{-1}\{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\}^m = 1 \cdot 1^m = 1$$

であるから，$(z')^{-1} = z^{-1}(\sqrt{2}+1)^m$，さらに $z^{-1}(\sqrt{2}+1)^m \in S$ であるから

$$(z')^{-1} \in S$$

である．これは (3) の結果に反する．よって，$(**)'$ は示された． …… (証明終わり)