$\alpha,\ \beta$ は 0 でない複素数で，等式 $\alpha^2+\sqrt{2}\alpha\beta+\beta^2=0$ を満たすとする．

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲は $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする．

(ii) 複素数平面上で，3 点 A(α)，B(β)，および原点 O を頂点とする三角形を考える．$\angle$AOB, $\angle$OBA, $\angle$BAO の大きさをそれぞれ求めよ．

(17 広島市大 情報科学 2(1))

【答】

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\cos\left(\pm\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{3}{4}\pi\right)$ (複号同順)

(ii) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{3}{4}\pi,\quad \angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{BAO}=\dfrac{\pi}{8}$

【解答】

$$\alpha^2+\sqrt{2}\alpha\beta+\beta^2=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(i) $\beta\neq 0$ より

$$① \iff \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\sqrt{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$$

2 次方程式を解くと

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として極形式で表すと

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\cos\left(\pm\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{3}{4}\pi\right)}\ \textbf{(複号同順)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) 偏角 $\theta=\pm\dfrac{3}{4}\pi$ どちらの場合も $\triangle$OAB は

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB},\ \angle\mathrm{AOB}=\frac{3}{4}\pi$$

の二等辺三角形だから

$$\boldsymbol{\angle\mathrm{AOB}=\frac{3}{4}\pi,}$$
$$\boldsymbol{\angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{BAO}=\frac{\pi}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．