表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある．ただし，$0<p<1$ である．このとき，下図のような正三角形の 3 頂点 A，B，C を次の規則で移動する動点 R を考える．

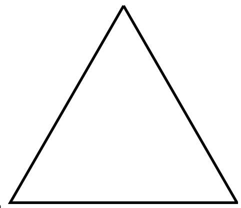
コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する．

R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する．ここで，N は自然数である．移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) P_2，P_3 を求めよ．

(2) P_{2m}，P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ．

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする．移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ．



(17 広島大 理系 3)

【答】

(1) $P_2=2p(1-p)$，$P_3=1-3p+3p^2$

(2) $P_{2m}=2p^m(1-p)^m$，$P_{2m+1}=(1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1}$

(3) $Q=\dfrac{N}{4^N}$

【解答】

$q=1-p$ とかく．

(1) 2 回目に動点 R が A に初めて戻るのは，R が

$$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{A},\quad \mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}$$

と移動するときにかぎられる．これらは排反であるから

$$P_2=pq+qp=\boldsymbol{2p(1-p)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

3 回目に動点 R が A に初めて戻るのは

$$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A},\quad \mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{A}$$

と移動するときにかぎられる．これらは排反であるから

$$P_3=p^3+q^3=\boldsymbol{1-3p+3p^2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $2m$ 回目に動点 R が A に初めて戻るのは，R が

$$\begin{array}{l}
\qquad 1 \qquad 2 \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad {\scriptstyle 2m-1} \quad {\scriptstyle 2m} \\
\mathrm{A} \xrightarrow{p} \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{BC} \cdots \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{B} \xrightarrow{q} \mathrm{A}, \\
\mathrm{A} \xrightarrow{q} \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{CB} \cdots \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{C} \xrightarrow{p} \mathrm{A}
\end{array}$$

と移動するときにかぎられる．これらは排反であるから

$$\begin{aligned}
P_{2m} &= p(pq)^{m-1}q + q(qp)^{m-1}p \\
&= 2p^m q^m \\
&= \boldsymbol{2p^m(1-p)^m}
\end{aligned}$$

……(答)

$2m+1$ 回目に動点 R が A に初めて戻るのは，R が

$$\begin{array}{l}
\qquad 1 \qquad 2 \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad {\scriptstyle 2m-1} \quad {\scriptstyle 2m} \quad {\scriptstyle 2m+1} \\
\mathrm{A} \xrightarrow{p} \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{BC} \cdots \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{C} \xrightarrow{p} \mathrm{A}, \\
\mathrm{A} \xrightarrow{q} \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{CB} \cdots \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{C} \xrightarrow{q} \mathrm{B} \xrightarrow{q} \mathrm{A}
\end{array}$$

と移動するときにかぎられる．これらは排反であるから

$$\begin{aligned}
P_{2m+1} &= p(pq)^{m-1}p^2 + q(qp)^{m-1}q^2 \\
&= (p^3+q^3)p^{m-1}q^{m-1} \\
&= \boldsymbol{(1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1}}
\end{aligned}$$

……(答)

(3) R が k 回目 $(2 \leqq k \leqq 2N+1)$ に A に初めて戻り，$2N+3$ 回目に 2 度目に戻る確率は

$$P_k P_{2N+3-k}$$

である．$p = \dfrac{1}{2}$ のとき，(2) より

$$\begin{aligned}
P_{2m} &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1-\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1} \\
P_{2m+1} &= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^3\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(2m+1)-1}
\end{aligned}$$

であり，k の偶奇によらず

$$P_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

である．求める確率 Q は

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{k=2}^{2N+1} P_k P_{2N+3-k} = \sum_{k=2}^{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2N+3-k)-1} \\
&= \sum_{k=2}^{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = \frac{2N}{2^{2N+1}} \\
&= \boldsymbol{\frac{N}{4^N}}
\end{aligned}$$

……(答)

- k の偶奇による場合分けをしたままで

$$Q = \sum_{k=1}^{N} P_{2m}P_{2N+3-2m} + \sum_{k=1}^{N} P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)}$$

として計算してもよい．まず，$p=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$P_{2m}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}=\frac{2}{4^m},\quad P_{2m+1}=\frac{1}{4^m}$$

であるから

$$\begin{aligned}
Q&=\sum_{k=1}^{N}P_{2m}P_{2(N+1-m)+1}+\sum_{k=1}^{N}P_{2m+1}P_{2(N+1-m)}\\
&=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2}{4^m}\cdot\frac{1}{4^{N+1-m}}\right)+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{4^m}\cdot\frac{2}{4^{N+1-m}}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{4^{N+1}}+\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{4^{N+1}}\\
&=2\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{4^{N+1}}\\
&=\frac{1}{4^N}\sum_{k=1}^{N}1\\
&=\frac{N}{4^N}
\end{aligned}$$