関数 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減および極値を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(2) t を定数とする．関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式を，t を用いて表せ．

(3) (2) で求めた接線 ℓ と関数 $y=f(x)$ のグラフが，異なる 3 つの共有点をもつための t の条件を求めよ．

(17 静岡大 理 (物化)・情報・工 2)

【答】

(1) 図略

(2) $y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+1$

(3) $-1<t<1$ かつ $t \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

【解答】

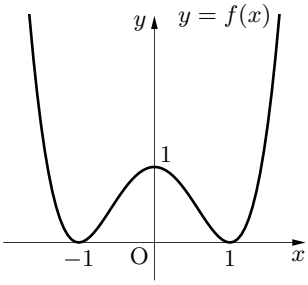
$$f(x)=(x-1)^2(x+1)^2=(x^2-1)^2$$
$$=x^4-2x^2+1$$

(1)
$$f'(x)=4x^3-4x$$
$$=4x(x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

極小値 : $f(\pm1)=0$,　極大値 : $f(0)=1$



である．$f(-x)=f(x)$ から，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称であり，グラフの概形は右図のようになる．

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=(4t^3-4t)(x-t)+t^4-2t^2+1$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 接線 ℓ と関数 $y=f(x)$ のグラフが異なる 3 つの共有点をもつための t の条件は

$$x^4-2x^2+1=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

が異なる 3 つの実数解をもつことである．ℓ と $y=f(x)$ のグラフが $x=t$ で接することに注意して，① を整理すると

$$x^4-2x^2-(4t^3-4t)x+3t^4-2t^2=0$$
$$\therefore\quad (x-t)^2(x^2+2tx+3t^2-2)=0$$

となるから求める条件は

$$x^2+2tx+3t^2-2=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

が t 以外の異なる 2 つの実数解をもつことである．

② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = t^2 - (3t^2 - 2) = -2t^2 + 2 = -2(t+1)(t-1)$$

であるから，求める条件は

$$\begin{cases} D > 0 \\ t^2 + 2t^2 + 3t^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{-1 < t < 1} \\ \boldsymbol{t \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$ であり，接点の x 座標 $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は $y = f(x)$ の変曲点 (数学 III) の x 座標である．