関数 $S(t)$ を

$$S(t) = \int_t^{t+1} |x^2 - 1| \, dx$$

と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = |x^2 - 1|$ のグラフの概形を図示せよ．

(2) $-1 \leqq t \leqq 0$ であるとき，$S(t)$ を求めよ．

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ であるとき，$S(t)$ を求めよ．

(4) 関数 $S(t)$ の $-1 \leqq t \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．

(17 宇都宮大 教育・地デ・農 4)

【答】

(1) 略

(2) $S(t) = -t^2 - t + \dfrac{2}{3}$

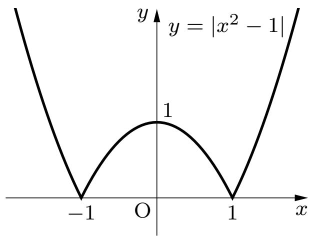
(3) $S(t) = \dfrac{2}{3}t^3 + t^2 - t + \dfrac{2}{3}$

(4) 最大値 $\dfrac{4}{3}$，最小値 $\dfrac{8 - 3\sqrt{3}}{6}$

【解答】

(1) 場合分けして，絶対値をはずすと

$$\begin{aligned} y &= |x^2 - 1| \\ &= \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leqq -1,\ 1 \leqq x \text{ のとき}) \\ -x^2 + 1 & (-1 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

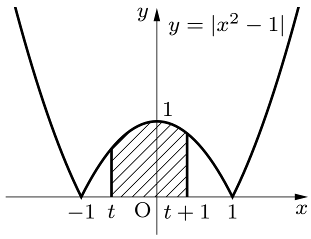


であるから，$y = |x^2 - 1|$ のグラフの概形は右図となる．

(2) $-1 \leqq t \leqq 0$ のとき

$-1 \leqq t \leqq 0 \leqq t + 1 \leqq 1$ であるから

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{t+1} (-x^2 + 1) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_t^{t+1} \\ &= -\frac{1}{3}\{(t+1)^3 - t^3\} + \{(t+1) - t\} \\ &= \boldsymbol{-t^2 - t + \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

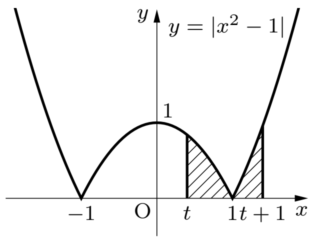


である．

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$0 \leqq t \leqq 1 \leqq t + 1$ であるから

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^1 (-x^2 + 1) \, dx + \int_1^{t+1} (x^2 - 1) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_t^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^{t+1} \\ &= 2\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{t^3}{3} + t\right) \\ &\quad + \left\{ \frac{(t+1)^3}{3} - (t+1) \right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$



である．

(4) (2)，(3) より

(i) $-1 \leqq t \leqq 0$ のとき

$$S(t) = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{12}$$

であり

$$\text{最大値 } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{12}, \quad \text{最小値 } f(-1) = f(0) = \frac{2}{3}$$

である．

(ii) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$S'(t) = 2t^2 + 2t - 1 \quad (0 < t < 1)$$

この区間での $S(t)$ の増減は下表となる．

t	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\dfrac{2}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\dfrac{4}{3}$

$$\text{最大値 } S(1) = \frac{4}{3}$$

である．また $S(t) = S'(t) \cdot \left(\dfrac{t}{3} + \dfrac{1}{6}\right) - t + \dfrac{5}{6}$ であるから

$$\text{最小値 } S\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{6} = \frac{8-3\sqrt{3}}{6}$$

である．

以上，(i)，(ii) での最大値，最小値を比較することにより，$S(t)$ の $-1 \leqq t \leqq 1$ における最大値，最小値は

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ $(t = 1 \text{ のとき})$，　**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}}$ $\left(t = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{のとき}\right)$ ……(答)

となる．

- $\dfrac{2}{3}$ と $-\dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}$ の大小については

$$\frac{2}{3} - \frac{8-3\sqrt{3}}{6} = \frac{4-8+3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{16}+\sqrt{27}}{6} > 0$$

より，$\dfrac{8-3\sqrt{3}}{6} < \dfrac{2}{3}$ である．