放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ と放物線 $C_2 : y = -x^2 + 1$ について，次の各問に答えなさい．

(1) 放物線 C_1 は点 $(0,\ -1)$ を頂点として，点 $(2,\ 3)$ を通る．また，放物線 C_1 と放物線 C_2 は点 $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$ と点 $\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$ で交わる．ただし，$x_1 < x_2$ とする．

(i) $a,\ b,\ c$ の値をそれぞれ求めなさい．

(ii) $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ の値をそれぞれ求めなさい．

(iii) 放物線 C_1 の点 A_1，点 A_2 における接線の方程式をそれぞれ求めなさい．

(2) 放物線 C_2 上の点 P の x 座標を t とし，原点と点 P を通る直線の傾きを m とする．また，連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq mx \\ y \geqq x^2 \\ |x| \leqq |t| \end{cases}$$

の表す領域の面積 $S(t)$ を t の関数とする．ただし，$|t| \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とする．

(i) $t \fallingdotseq 0$ のとき，m を t の式で表しなさい．

(ii) $S(t)$ を t の式で表しなさい．

(iii) $S(t)$ を最大にするすべての t の値を求めなさい．また，$S(t)$ の最大値を求めなさい．

(17 帯広畜産大 2)

【答】

(1) (i) $a = 1,\ b = 0,\ c = -1$

(ii) $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0$

(iii) A_1 における接線の方程式は $y = -2x - 2$，A_2 における接線の方程式は $y = 2x - 2$

(2) (i) $m = -t + \dfrac{1}{t}$

(ii) $S(t) = \begin{cases} -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}t & \left(0 < t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \dfrac{5}{6}t^3 - \dfrac{1}{2}t & \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq t < 0\right) \end{cases}$

(iii) $t = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき，最大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

【解答】

$$C_1 : y = ax^2 + bx + c$$

$$C_2 : y = -x^2 + 1$$

(1) (i) 放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ は点 $(0,\ -1)$ を頂点とするから

$$y = ax^2 - 1$$

と表すことができ

$$\boldsymbol{b = 0,\ c = -1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．さらに点 $(2,\ 3)$ を通るから

$$3 = 4a - 1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) C_1, C_2 の交点の x 座標は

$$x^2-1=-x^2+1$$
$$2x^2=2 \qquad \therefore \quad x=\pm 1$$

である．交点 $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$ について $x_1<x_2$ であるから

$$\mathrm{A}_1(-1,\ 0),\ \mathrm{A}_2(1,\ 0)$$

であり

$$\boldsymbol{x_1=-1,\ x_2=1,\ y_1=0,\ y_2=0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iii) $C_1: y=x^2-1$ について $y'=2x$ であり，C_1 上の点 $\mathrm{A}_1(-1,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y=-2\{x-(-1)\} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=-2x-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

点 $\mathrm{A}_2(1,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y=2(x-1) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=2x-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (i) C_2 上の点 P の x 座標が t のとき，P の座標は $(t,\ -t^2+1)$ であり，$t \fallingdotseq 0$ のとき，直線 OP の傾き m は

$$m=\frac{-t^2+1}{t}=\boldsymbol{-t+\frac{1}{t}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) 連立不等式

$$(*)\begin{cases} y \leqq mx \\ y \geqq x^2 \\ |x| \leqq |t| \quad \left(|t| \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

について，直線 OP の傾き $m\left(=-t+\dfrac{1}{t}\right)$ が定義されるのは $t \fallingdotseq 0$ のときであるから，(ii)(iii) においても $t \fallingdotseq 0$ とする．また

$$|x| \leqq |t| \iff -|t| \leqq x \leqq |t|$$

である．

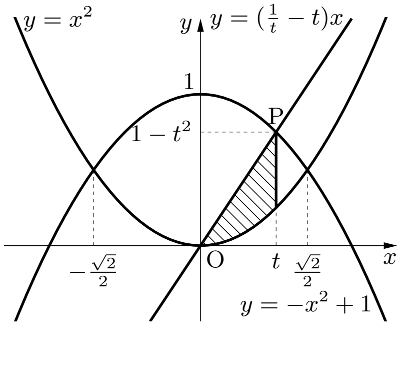
(ア) $0<t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} y \leqq \left(\dfrac{1}{t}-t\right)x \\ y \geqq x^2 \\ -t \leqq x \leqq t \end{cases}$$

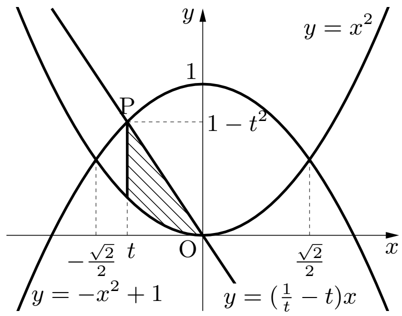
であり，$(*)$ の表す領域の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}t(1-t^2)-\int_0^t x^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}(t-t^3)-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t \\ &= -\frac{5}{6}t^3+\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

である．



(イ) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq t < 0$ のとき



$$(*) \iff \begin{cases} y \leqq \left(\dfrac{1}{t} - t\right) x \\ y \geqq x^2 \\ t \leqq x \leqq -t \end{cases}$$

であり，$(*)$ の表す領域の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}(-t)(1-t^2) - \int_t^0 x^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}(t^3 - t) - \left[\frac{x^3}{3}\right]_t^0 \\ &= \frac{1}{2}(t^3 - t) + \frac{t^3}{3} \\ &= \frac{5}{6}t^3 - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

である．

(ア)(イ) より

$$\boldsymbol{S(t) = \begin{cases} -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}t & \left(0 < t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \dfrac{5}{6}t^3 - \dfrac{1}{2}t & \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq t < 0\right) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) $S(-t) = S(t)$ より，$S(t)$ のグラフは直線 $t = 0$ に関して対称であるから，$0 < t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の範囲での増減を調べる．

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{5}{2}\left(t^2 - \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$0 < t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ における $S(t)$ の増減は右表となるから，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ において，$S(t)$ は

$$\boldsymbol{t = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}} \quad \cdots\cdots(答)$$

のとき

$$最大値 : f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{5}{6}\cdot\frac{\sqrt{5}}{25} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{30} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{15}} \quad \cdots\cdots(答)$$

をとる．