実数 c に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|a_n| + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．

(1) $c \geqq 0$ とする．このとき，すべての n に対して $a_n \geqq 0$ が成り立つことを示せ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c < 0$ とする．このとき，すべての n に対して $a_n < 0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ．

(17 北海道大 後 理・工 3)

【答】

(1) 証明は略．$a_n = (c-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$

(2) $c \leqq -2$

(3) $c \geqq -2$

【解答】

$$a_1 = c,$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|a_n| + 1 \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $c \geqq 0$ のもとで，すべての n に対して「$a_n \geqq 0 \cdots\cdots (*)$」が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 = c \geqq 0$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k\ (\geqq 1)$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると，①より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k - \frac{1}{2}a_k + 1 = \frac{1}{2}a_k + 1 \\ &\geqq \frac{1}{2}\cdot 0 + 1 \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての n に対して $(*)$ は成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

さらに，$(*)$ が成り立つとき，①は

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$

変形して

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

となるから，数列 $\{a_n-2\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$，初項 $c-2$ の等比数列である．

$$a_n-2=(c-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(c-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2}\qquad\cdots\cdots ②$$

……(答)

(2) $c<0$ のもとで，すべての n に対して「$a_n<0$ …… $(**)$」が成り立つとすると，①は

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}a_n+1$$

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+1\qquad\cdots\cdots ③$$

変形して

$$a_{n+1}+2=\frac{3}{2}(a_n+2)$$

となるから，数列 $\{a_n+2\}$ は公比 $\dfrac{3}{2}$，初項 $c+2$ の等比数列である．

$$a_n+2=(c+2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=(c+2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2\qquad\cdots\cdots ④$$

このとき，$c+2>0$ と仮定すると

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

となり，すべての n に対して $(**)$ が成立することに反する．

したがって，

$$c+2\leqq 0\quad すなわち\quad c\leqq -2$$

であることが必要である．

逆に，$c\leqq -2$ のもとで，すべての n に対して「$a_n\leqq -2$ …… $(***)$」が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$a_1=c\leqq -2$$

であるから，$(***)$ は成り立つ．

(ii) $n=k\ (\geqq 1)$ のとき $(***)$ が成り立つと仮定すると，③ より

$$a_{k+1}=\frac{3}{2}a_k+1\leqq\ \frac{3}{2}\cdot(-2)+1=-2$$

であり，$n=k+1$ のときも $(***)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての n に対して $(***)$ は成り立つ．

以上から，求める c の値の範囲は

$$\boldsymbol{c\leqq -2}$$

……(答)

である．

(3) 実数 c の値で場合分けして，数列 $\{a_n\}$ の極限を調べると，つぎのようになる．

(i) $c\geqq 0$ のとき，②より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

となり，数列 $\{a_n\}$ は収束する．

(ii) $c < -2$ のとき，④より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

となり，数列 $\{a_n\}$ は発散する．

(iii) $c = -2$ のとき，④より $a_n = -2$ であり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2$$

となり，数列 $\{a_n\}$ は収束する．

(iv) $-2 < c < 0$ のとき，(2) の考察により $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であり

$$a_N \geqq 0$$

となる番号 N が存在する．

この N に対して，(1) と同様の議論をすることにより，すべての $n \geqq N$ なる n に対して $a_n \geqq 0$ が成り立ち，④を導くのと同様にして

$$a_n = (a_N - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} + 2 \quad (n \geqq N)$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

となり，数列 $\{a_n\}$ は収束する．

以上，(i)，(ii)，(iii)，(iv) より，求める範囲は

$$\boldsymbol{c \geqq -2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $f(x) = x - \dfrac{1}{2}|x| + 1$

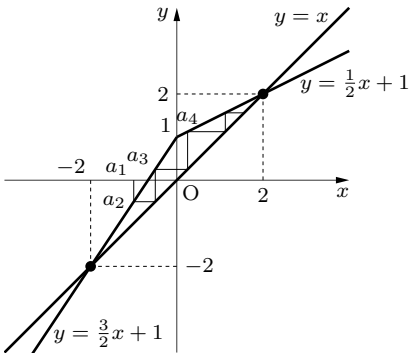
$$= \begin{cases} \dfrac{3}{2}x + 1 & (x \leqq 0) \\ \dfrac{1}{2}x + 1 & (x \geqq 0) \end{cases}$$

とすると，$a_{n+1} = f(a_n)$ であり，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散は

$c > -2$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$c = -2$ のとき，$a_1 = a_2 = \cdots = -2$ であり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2$$

$c < -2$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

である．