$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ とし，自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおく．さらに，

$$\begin{cases} (2n)!! = (2n)\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4\cdot 2 \\ (2n+1)!! = (2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1 \end{cases}$$

とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，$I_n = kI_{n-2}$ を満たす k を n を用いて表せ．

(2) I_{2n} と I_{2n+1} を n を用いて表せ．

(3)
$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leqq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

を示し，さらに極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!}$$

を求めよ．

(17 佐賀大 後 理工 2)

【答】

(1) $k = \dfrac{n-1}{n}$

(2) $I_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$，$I_{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

(3) 証明略，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$

【解答】

(1) 部分積分を用いる．

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\sin^{n-1} x\,dx \\ &= \Big[-\cos x\cdot\sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\cdot(n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

である．したがって

$$\{1+(n-1)\}I_n = (n-1)I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

を得る．よって

$$\boldsymbol{k = \frac{n-1}{n}}$$ ……(答)

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\ &= \cdots \\ &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 \end{aligned}$$

$I_0 = \frac{\pi}{2}$ より

$$\boldsymbol{I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} \\ &= \cdots \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} I_1 \end{aligned}$$

ここで

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

であるから

$$\boldsymbol{I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

を得る．

(3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $0 < \sin x < 1$ であり，n について数列 $\{\sin^n x\}$ は単調減少であるから，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ においては

$$\sin^{2n+2} x \leqq \sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x$$

である．したがって

$$I_{2n+2} \leqq I_{2n+1} \leqq I_{2n}$$

となる．(2) の結果により

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leqq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

を得る．この各項に $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$ をかけると

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \leqq \frac{\{(2n.)!!\}^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leqq \frac{\pi}{2}$$

となる．

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

であり，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!}=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．