実数 $a,\ b$ に対し，$I(a,\ b)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-|x|}-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ とする．ただし e は自然対数の底である．

(1) $I(a,\ b)=I(0,\ b)+\pi a^2$ を示せ．
(2) $I(0,\ b)$ を求めよ．
(3) $I(a,\ b)\geqq 1-e^{-2\pi}-\dfrac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi}$ を示せ．また等号が成立するときの $a,\ b$ の値を求めよ．

(17 三重大 医 4)

【答】
(1) 略
(2) $I(0,\ b)=\pi b^2-2(1+e^{-\pi})b+1-e^{-2\pi}$
(3) 略．等号が成立するときの $a,\ b$ の値は $a=0,\ b=\dfrac{1+e^{-\pi}}{\pi}$

【解答】

$$I(a,\ b)=\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-|x|}-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$$

(1) $e^{-|x|}$，$\cos x$ は偶関数，$\sin x$ は奇関数であるから

$$\begin{aligned}I(a,\ b)&=\int_{-\pi}^{\pi}\{(e^{-|x|}-b\cos x)-a\sin x\}^2\,dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\{(e^{-|x|}-b\cos x)^2-2a(e^{-|x|}-b\cos x)\sin x+\sin^2 x\}\,dx\end{aligned}$$

$(e^{-|x|}-b\cos x)\sin x$ は奇関数であるから

$$\begin{aligned}I(a,\ b)&=\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-|x|}-b\cos x)^2\,dx+a^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx\\&=I(0,\ b)+2a^2\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\,dx\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

よって

$$I(a,\ b)=I(0,\ b)+\pi a^2$$ ……(証明終わり)

が成り立つ．

(2) $(e^{-|x|}-b\cos x)^2$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned}I(0,\ b)&=2\int_0^{\pi}(e^{-x}-b\cos x)^2\,dx\\&=2\int_0^{\pi}e^{-2x}dx-4b\int_0^{\pi}e^{-x}\cos x\,dx+2b^2\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^\pi e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^\pi = -\frac{e^{-2\pi}-1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx &= \Big[e^{-x}\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-e^{-x})\sin x\,dx \\ &= \Big[e^{-x}(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-e^{-x})(-\cos x)\,dx \\ &= e^{-\pi}+1-\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

よって，

$$\begin{aligned}I(0,\ b) &= -(e^{-2\pi}-1)-2b(e^{-\pi}+1)+b^2\pi \\ &= \boldsymbol{\pi b^2 - 2(1+e^{-\pi})b + 1 - e^{-2\pi}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx$ を次のように計算してもよい．

$$(e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$$
$$(e^{-x}\sin x)' = e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$$

辺々引いて

$$\{e^{-x}(\cos x-\sin x)\}' = -2e^{-x}\cos x$$

$$\therefore \quad \int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx = \left[-\frac{e^{-x}(\cos x-\sin x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

(3) (1)，(2) より

$$\begin{aligned}I(a,\ b) &= \{\pi b^2 - 2(1+e^{-\pi})b + 1 - e^{-2\pi}\} + \pi a^2 \\ &= \pi a^2 + \pi\left(b-\frac{1+e^{-\pi}}{\pi}\right)^2 + 1 - e^{-2\pi} - \frac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi}\end{aligned}$$

よって

$$I(a,\ b) \geqq 1 - e^{-2\pi} - \frac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi} \qquad \cdots\cdots(証明終わり)$$

が成り立つ．また，等号が成り立つときの $a,\ b$ の値は

$$\boldsymbol{a=0,\ b=\frac{1+e^{-\pi}}{\pi}} \qquad \cdots\cdots(答)$$