関数 $f(x) = 1 + \sin x - x\cos x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．
(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ．
(3) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

(17 北海道大 理 2)

【答】

(1) 最大値 $1+\pi$，最小値 $1-2\pi$

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx = x - 2\cos x - x\sin x + C$ (C は積分定数)

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = 4\pi + 4$

【解答】

(1)
$$f(x) = 1 + \sin x - x\cos x$$
$$f'(x) = 0 + \cos x - (1\cdot\cos x - x\sin x) = x\sin x$$

$f(x)$ の増減は右表となるから，$f(x)$ の

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

最大値は　$f(\pi) = \boldsymbol{1+\pi}$　……(答)

である．また

$$f(0) = 1,\quad f(2\pi) = 1 - 2\pi$$

より，$f(0) > f(2\pi)$ であるから，$f(x)$ の

最小値は　$f(2\pi) = \boldsymbol{1-2\pi}$　……(答)

である．

(2) $f(x)$ の不定積分は

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int (1 + \sin x - x\cos x)\,dx \\ &= x - \cos x - \left(x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx\right) \\ &= x - \cos x - (x\sin x + \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ &= \boldsymbol{x - 2\cos x - x\sin x + C}\end{aligned}$$

……(答)

(3) $f(0)=1>0,\ f(2\pi)=1-2\pi<0,\ f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=0$

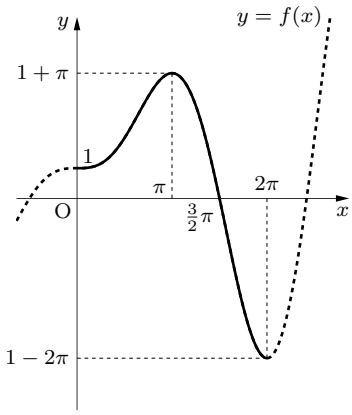
と，(1) の増減表より

$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ において　　$f(x) \geqq 0$

$\dfrac{3}{2}\pi \leqq x \leqq 2\pi$ において　$f(x) \leqq 0$

であるから，$F(x)=x-2\cos x-x\sin x$ とすると

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx\\
=&\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)\,dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\{-f(x)\}\,dx\\
=&\Big[F(x)\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}+\Big[-F(x)\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\\
=&2F\left(\frac{3}{2}\pi\right)-F(0)-F(2\pi)\\
=&2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi\right)-(-2)-(2\pi-2)\\
=&\boldsymbol{4\pi+4}
\end{aligned}$$

……(答)

である．