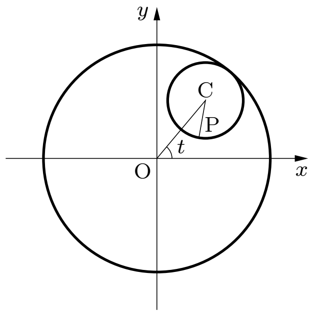
曲線 K

$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

について，以下の問に答えなさい．



(1) $0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ における曲線 K の長さを求めなさい．

(2) 円 $O : x^2 + y^2 = 3^2$ に円 $C : (x-2)^2 + y^2 = 1$ が点 $(3,\ 0)$ で内接している．この接点における円 C 上の点を P とする．円 C を円 O に内接させながら，すべらないように O を中心として反時計回りに回転させる．このとき，点 P が動く軌跡は上の曲線 K に一致する．その理由を説明した以下の文章の空欄を適切な数式で補いなさい．答えはすべて解答用紙 (省略) に記入しなさい．

「簡単のため，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\pi$ で考える．円 C の中心を C とするとき，線分 OC と x 軸のなす角を t とする．

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とベクトル $(1,\ 0)$ とのなす角は $\boxed{\text{(ア)}}$ である．

よって $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \left(\boxed{\text{(イ)}},\ \boxed{\text{(ウ)}}\right)$ と表せる．一方，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(\boxed{\text{(エ)}},\ \boxed{\text{(オ)}}\right)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より，K に一致することがわかる.」

(3) 曲線 K の概形を描きなさい．

(17 日本大 医 A 5)

【答】

(1) $\dfrac{16}{3}$

(2)

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
$2t$	$\cos 2t$	$-\sin 2t$	$2\cos t$	$2\sin t$

(3) 略

【解答】

$$K : \begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(1) $0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ における曲線 K の長さ L は

$$L = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

である．ここで

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2\sin t - 2\sin 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\cos t - 2\cos 2t \end{cases}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 4\left\{(\sin t+\sin 2t)^2+(\cos t-\cos 2t)^2\right\}\\
&= 4\{1+2(\sin t\sin 2t-\cos t\cos 2t)+1\}\\
&= 8\{1-\cos(t+2t)\}\\
&= 16\sin^2\frac{3}{2}t=\left(4\sin\frac{3}{2}t\right)^2
\end{aligned}
$$

である．t は範囲 $0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi$ を動くから，$0 \leqq \frac{3}{2}t \leqq \pi$ であり，$\sin\frac{3}{2}t \geqq 0$ である．

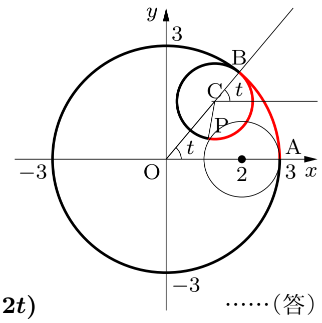
よって

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 4\sin\frac{3}{2}t\,dt = \left[-4\cdot\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}\\
&= \frac{8}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)=\mathbf{\frac{16}{3}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．

(2) 右図のように，点 $(3,\ 0)$ を A，直線 OC と円 O との交点のうち C の延長上にある点を B とする．$\angle\mathrm{AOB}=t$ であるから，弧 AB の長さは $3t$ であり，これが円 C の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BP}}$ の長さに等しいから



$$\angle\mathrm{BCP}=3t$$

である．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とベクトル $(1,\ 0)$ とのなす角は

$$3t-t=\mathbf{2t}$$

……(答)

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(\cos(-2t),\ \sin(-2t))=\mathbf{(\cos 2t,\ -\sin 2t)}$$

……(答)

と表せる．一方

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2(\cos t,\ \sin t)=\mathbf{(2\cos t,\ 2\sin t)}$$

……(答)

であるから

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\
&= (2\cos t,\ 2\sin t)+(\cos 2t,\ -\sin 2t)\\
&= (2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)
\end{aligned}
$$

となり，点 P が動く軌跡は曲線 K に一致する．　　…… (証明終わり)

(3) (1) の微分から

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -2(\sin t+2\sin t\cos t)=-4\sin t\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)\\
\frac{dy}{dt} &= 2(\cos t-2\cos^2 t+1)=-4\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)(\cos t-1)
\end{aligned}
$$

x，y の増減は下表となる．

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	3	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1	↘	$-\frac{3}{2}$	↘	3
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↘	0	↘	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↗	0
$\frac{dy}{dx}$		$-$		$-$		$+$		$+$	

さらに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - 1}{\sin t} = \frac{-2\sin^2 \frac{t}{2}}{2\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = -\tan \frac{t}{2}$$

より

$$\lim_{t \to +0} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \lim_{t \to \frac{2}{3}\pi} \frac{dy}{dx} = -\sqrt{3}, \quad \lim_{t \to \frac{4}{3}\pi} \frac{dy}{dx} = \sqrt{3}, \quad \lim_{t \to 2\pi - 0} \frac{dy}{dx} = 0$$

であることに注意すると，曲線 K の概形は下図の太実線部分となる．