n は 3 以上の整数とし，円周を n 等分する点を A_1，A_2，$\cdots$，A_n とする．これらの点の中から異なる 3 点を選び，それらを結んで作られる三角形を考える．3 点の選び方は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通りある．また，このような三角形の中で，n が偶数のとき，直角三角形となる点の選び方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りあり，鈍角三角形となる点の選び方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある．さらに，n が奇数のとき，鈍角三角形となる点の選び方は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りあり，鋭角三角形となる点の選び方は $\boxed{\text{コ}}$ 通りある．

(17 同志社大 全学部文系 1(2))

【答】

カ	キ	ク	ケ
$\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$	$\dfrac{1}{2}n(n-2)$	$\dfrac{1}{8}n(n-2)(n-4)$	$\dfrac{1}{8}n(n-1)(n-3)$

コ
$\dfrac{1}{24}n(n-1)(n+1)$

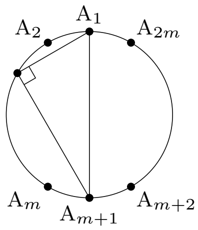
【解答】

n 個の点の中からの異なる 3 点を選ぶ選び方は全部で

$${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

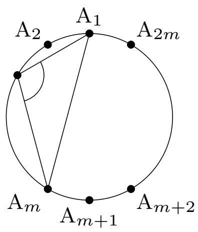
(i) n が偶数のときを考える．$n = 2m$ $(m \geqq 2)$ とおく．

直角三角形の斜辺は円の直径であり，直径となる 2 点の選び方は m 通りある．各々の直径に対して直角となる頂点の選び方は $2m-2$ 通りあるから，直角三角形となる 3 点の選び方は



$$\begin{aligned} m\cdot(2m-2) &= \frac{n}{2}\cdot(n-2) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-2)}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

次に，鈍角三角形について考える．最大辺の長さは $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$，$\cdots$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_m$ の $m-2$ 通りがあり，最大辺の長さが $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k$ $(3 \leqq k \leqq m)$ となる 2 頂点の選び方は $2m$ 通り，鈍角となる頂点の選び方は $k-2$ 通りあるから，$m \geqq 3$ のとき，鈍角三角形となる 3 点の選び方は



$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{m} 2m\cdot(k-2) &= 2m\cdot\{1+2+\cdots+(m-2)\} \\ &= 2m\cdot\frac{(m-2)(m-1)}{2} \\ &= n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ &= \frac{1}{8}n(n-2)(n-4) \end{aligned}$$

$m=2$ のとき，すなわち $n=4$ のときは鈍角三角形を作ることはできないから，0 通り．これは上式に含まれる．よって，求める選び方は

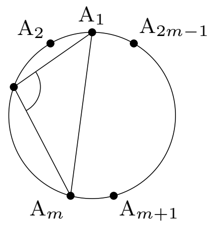
$$\boldsymbol{\frac{1}{8}n(n-2)(n-4)}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 角に着目して数えてもよい．

  直角となる頂点の選び方は $2m$ 通りある．これを A_1 とする．第 2 の頂点 A_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ をとるとき，A_1 が直角となる第 3 の頂点は A_{k+m} と定まる．よって，直角三角形となる 3 点の選び方は
$$2m\cdot(m-1)=n\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{1}{2}n(n-2)\ (\text{通り})$$
  鈍角となる頂点の選び方は $2m$ 通りある．これを A_1 とする．第 2 の頂点 A_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ をとるとき，A_1 が鈍角となる第 3 の頂点は A_{k+m+1}，$\cdots$，A_{2m} の $2m-(k+m)=m-k$ 通りがある．よって，鈍角三角形となる 3 点の選び方は
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{m}2m\cdot(m-k)&=2m\cdot\{(m-2)+(m-3)+\cdots+1+0\}\\&=2m\cdot\frac{(m-2)(m-1)}{2}\\&=n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\\&=\frac{1}{8}n(n-2)(n-4)\ (\text{通り})\end{aligned}$$
  鈍角三角形については，次のように数えてもよい．

  鈍角となる頂点の選び方は $2m$ 通りあり，それを A_1 とする．鈍角三角形 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j$ について $i,\ j$ は
$$2\leqq i\leqq m-1\ \text{かつ}\ i+m+1\leqq j\leqq 2m\quad(\text{ただし，}m\geqq 3)$$
  としてよく，これを整理すると
$$\begin{aligned}&2\leqq i\leqq j-m-1\leqq m-1\\\therefore\quad&2\leqq i<j-m\leqq m\end{aligned}$$
  である．これを満たす $(i,\ j)$ の組の個数は，$(i,\ j-m)$ の組の個数に等しいから，$m\geqq 3$ のとき
$${}_{m-1}\mathrm{C}_2=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$
  よって，鈍角三角形となる点の選び方は
$$2m\cdot\frac{(m-1)(m-2)}{2}=n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)=\frac{1}{8}n(n-2)(n-4)\ (\text{通り})$$
  これは $m=2$，すなわち，$n=4$ のときも成り立つ．

(ii) n が奇数のときを考える．$n=2m-1$ $(m\geqq 2)$ とおく．



鈍角三角形の最大辺の長さは $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$，$\cdots$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_m$ の $m-2$ 通りがあり，最大辺の長さが $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k$ $(3\leqq k\leqq m)$ となる 2 頂点の選び方は $2m-1$ 通り，鈍角となる頂点の選び方は $k-2$ 通りあるから，$m\geqq 3$ のとき，鈍角三角形となる 3 点の選び方は
$$\begin{aligned}&\sum_{k=3}^{m}(2m-1)\cdot(k-2)\\=&(2m-1)\cdot\{1+2+\cdots+(m-2)\}\\=&(2m-1)\cdot\frac{(m-2)(m-1)}{2}\\=&n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-2\right)\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\\=&\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\end{aligned}$$

$m=2$ のとき，すなわち $n=3$ のときは鈍角三角形を作ることはできないから，0 通り．これは上式に含まれる．よって，求める選び方は

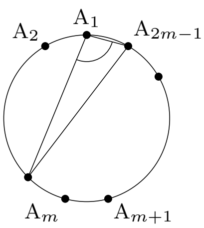
$$\boldsymbol{\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

n が奇数のとき直角三角形はできないから，鋭角三角形となる点の選び方の総数は，三角形となる点の選び方の総数から鈍角三角形となる点の選び方の総数を除けばよい．

$$\begin{aligned}
&{}_n\mathrm{C}_3-\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\\
=&\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\\
=&\frac{1}{24}n(n-1)\{4(n-2)-3(n-3)\}\\
=&\boldsymbol{\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

- 角に着目して鈍角三角形を数える．

鈍角となる頂点の選び方は $2m-1$ 通りある．それを A_1 とする．第 2 の頂点 A_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1\ ;\ m\geqq 3)$ をとるとき，A_1 が鈍角となる第 3 の頂点は A_{k+m}，$\cdots$，A_{2m-1} の $(2m-1)-(k+m-1)=m-k$ 通りがある．よって，鈍角三角形となる 3 点の選び方は，$m\geqq 3$ のとき



$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{m-1}(2m-1)\cdot(m-k)\\
=&(2m-1)\cdot\{(m-2)+(m-3)+\cdots+1\}\\
=&(2m-1)\cdot\frac{(m-2)(m-1)}{2}\\
=&n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-2\right)\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\\
=&\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\ (\text{通り})
\end{aligned}$$

これは $m=2$，すなわち，$n=3$ のときも成り立つ．

鈍角三角形については，次のように数えてもよい．

鈍角となる頂点の選び方は $2m-1$ 通りあり，それを A_1 とする．鈍角三角形 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j$ について $i,\ j$ は

$$2\leqq i\leqq m-1 \text{ かつ } i+m\leqq j\leqq 2m-1 \quad (\text{ただし，} m\geqq 3)$$

としてよく，これを整理すると

$$\begin{aligned}
&2\leqq i\leqq j-m\leqq m-1\\
\therefore\quad &2\leqq i<j-m+1\leqq m
\end{aligned}$$

である．これを満たす $(i,\ j)$ の組の個数は，$(i,\ j-m+1)$ の組の個数に等しいから，$m\geqq 3$ のとき

$${}_{m-1}\mathrm{C}_2=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

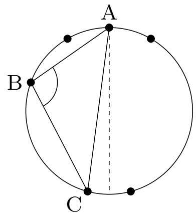
よって，鈍角三角形となる点の選び方は

$$(2m-1)\cdot\frac{(m-1)(m-2)}{2}=n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left(\frac{n+1}{2}-2\right)=\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\ (\text{通り})$$

これは $m=2$，すなわち，$n=3$ のときも成り立つ．

あるいは，次のように考えてもよい．

三角形 ABC において，$\angle$B が鈍角，3 点 A，B，C はこの順に反時計回りに並んでいるものとする．



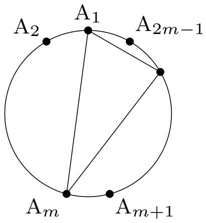
頂点 A の選び方は n 通りあり，A を一端とする直径をとることはできないから，B，C は A を端点とする半円上に並ぶ．よって，求める点の選び方は，$m \geqq 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
n \cdot {}_{m-1}\mathrm{C}_2 &= n \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2} \\
&= n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left(\frac{n+1}{2}-2\right) \\
&= \frac{1}{8}n(n-1)(n-3)
\end{aligned}
$$

これは $m=2$，すなわち，$n=3$ のときも成り立つ．

- 鋭角三角形を直接数える．

鋭角三角形となる 3 点の選び方の総数を S とおく．頂点の 1 つを A_1 となるように回転するとき，鋭角三角形 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j$ となる点の選び方は $3S$ 通りである．



一方，A_1 となる頂点の選び方は n 通りあり，第 2 の頂点 A_i $(2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ に対して，第 3 の頂点 A_j は A_{m+1}，A_{m+1}，$\cdots$，A_{i+m-1} の $(i+m-1)-m = i-1$ 通りがある．

よって，鋭角三角形 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j$ となる点の選び方は

$$
\begin{aligned}
3S &= \sum_{i=2}^{m} n(i-1) \\
&= n \cdot \{1+2+\cdots+(m-1)\} \\
&= n \cdot \frac{(m-1)m}{2} \\
&= n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\frac{n+1}{2} \\
&= \frac{1}{8}n(n-1)(n+1)\ (\text{通り})
\end{aligned}
$$

よって $S = \dfrac{1}{24}n(n-1)(n+1)$ である．