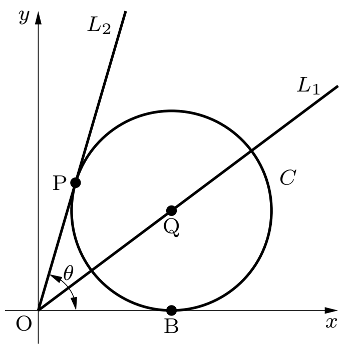
座標平面上に点 Q(8, 6) を中心として点 B(8, 0) で x 軸に接する円 C と，原点 O を通る直線 L_1 と L_2 がある．直線 L_1 は円 C の中心 Q を通り，直線 L_2 は点 P で円 C に接する．また，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 49$ に対して，点 A_{n+1} が点 A_n の右上に位置し，点 A_{n+1} と点 A_n の距離が $\dfrac{5}{12}$ になるように直線 L_1 上に点の集合 $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{50}\}$ を作る．ただし，点 A_1 の x 座標を $\dfrac{4}{3}$ とし，$\angle\mathrm{BOP}$ の角度を θ で表し，$0<\theta<2\pi$ とする．次の各問に答えなさい．



(1) (i) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値をそれぞれ求めなさい．

(ii) 点 P の座標を求めなさい．

(iii) 直線 L_1 と L_2 の方程式をそれぞれ求めなさい．

(2) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 50$ に対して点 A_n の座標を n を用いて表しなさい．また，点の集合 $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{50}\}$ におけるすべての点の y 座標の和を求めなさい．

(3) 点の集合 $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{50}\}$ から任意の一点 A_i を選ぶとき，点 A_6 または円 C の内部にある点が選ばれる事象を S とする．事象 S が起こる確率を求めなさい．また，事象 S が起こるとき，選ばれた点 A_i において i が 3 の整数倍になる確率を求めなさい．

(17 帯広畜産大 1)

【答】

(1) (i) $\sin\theta=\dfrac{7}{25}$，$\cos\theta=\dfrac{24}{25}$

(ii) $\mathrm{P}\left(\dfrac{56}{25},\ \dfrac{192}{25}\right)$

(iii) $L_1: y=\dfrac{3}{4}x$，$L_2: y=\dfrac{24}{7}x$

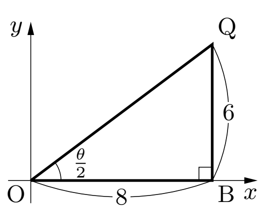
(2) $\mathrm{A}_n\left(\dfrac{1}{3}n+1,\ \dfrac{1}{4}n+\dfrac{3}{4}\right)$，$\dfrac{1425}{4}$

(3) $P(S)=\dfrac{3}{5}$，$P_S(\mathrm{A}_i$において i が 3 の整数倍$)=\dfrac{1}{3}$

【解答】

(1) (i) Q(8, 6)，B(8, 0)，$\angle\mathrm{BOQ}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOP}=\dfrac{\theta}{2}$ であるから

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{OB}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$



である．よって

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-1$$

$$=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{4^2-3^2}{4^2+3^2}=\mathbf{\frac{7}{25}}$$ ……(答)

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{24}{25}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 円 C 上の点は接点 B 以外は第 1 象限内にあるから，$\theta = \angle\mathrm{BOP}$ $(0<\theta<2\pi)$ である θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を満たす．したがって

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{25^2-7^2}}{25} = \frac{\sqrt{32\cdot 18}}{25} = \frac{24}{25}$$

である．

(ii) $\mathrm{OP}=\mathrm{OB}=8$ であるから

$$(\mathrm{P} \text{ の } x \text{ 座標}) = \mathrm{OP}\cos\theta = 8\cdot\frac{7}{25} = \frac{56}{25}$$
$$(\mathrm{P} \text{ の } x \text{ 座標}) = \mathrm{OP}\sin\theta = 8\cdot\frac{24}{25} = \frac{192}{25}$$

である．よって，点 P の座標は

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{56}{25}},\ \boldsymbol{\frac{192}{25}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) L_1 は原点と Q(8, 6) を通る直線であるから，L_1 の方程式は

$$y = \frac{6}{8}x \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = \frac{3}{4}x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，L_2 は原点と $\mathrm{P}\left(\frac{56}{25},\ \frac{192}{25}\right)$ を通る直線であるから，L_2 の方程式は

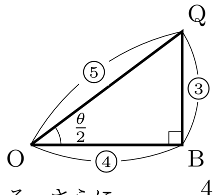
$$y = \frac{\frac{192}{25}}{\frac{56}{25}}x \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = \frac{24}{7}x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{50}\}$ は直線 L_1 上の点の集合で A_n $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$ の座標を $(x_n,\ y_n)$ とおくと

$$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \frac{5}{12},\ x_n < x_{n+1},\ y_n < y_{n+1},\ x_1 = \frac{4}{3}$$

を満たしている．



$$x_{n+1}-x_n = \frac{5}{12}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{3}$$
$$y_{n+1}-y_n = \frac{5}{12}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{4}$$

であるから，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ はそれぞれ公差 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$ の等差数列である．さらに，$x_1=\frac{4}{3}$ であり，$y_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1$ であるから

$$x_n = \frac{4}{3}+\frac{1}{3}(n-1) = \frac{1}{3}n+1$$
$$y_n = 1+\frac{1}{4}(n-1) = \frac{1}{4}n+\frac{3}{4}$$

である．よって，A_n の座標は

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}n+1},\ \boldsymbol{\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

よって，点の集合 $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{50}\}$ におけるすべての点の y 座標の和は

$$\sum_{k=1}^{50} y_k = \sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{4}k+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{50(4+53)}{2} = \mathbf{\frac{1425}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 円 C の内部にある直線 L_1 上の点は

$$\begin{cases}(x-8)^2+(y-6)^2<6^2\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}$$

を満たす．このときの x の値の範囲は

$$(x-8)^2+\left(\frac{3}{4}x-6\right)^2<6^2$$
$$(x-8)^2+\frac{9}{16}(x-8)^2<6^2$$
$$\frac{25}{16}(x-8)^2<6^2$$
$$(x-8)^2<\frac{24^2}{5^2}$$
$$\therefore\quad -\frac{24}{5}<x-8<\frac{24}{5}$$
$$\therefore\quad \frac{16}{5}<x<\frac{64}{5}$$

A_n の x 座標は $\dfrac{1}{3}n+1$ であるから

$$\frac{16}{5}<\frac{1}{3}n+1<\frac{64}{5}$$
$$\frac{11}{5}<\frac{1}{3}n<\frac{59}{5}$$
$$\therefore\quad \frac{33}{5}<n<\frac{177}{5}$$

n は正の整数であるから

$$7 \leqq n \leqq 35$$

すなわち，点の集合 $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{50}\}$ のうち，$\mathrm{A}_7,\ \mathrm{A}_8,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{35}$ の 29 個が円 C の内部にある．A_6 とあわせると事象 S が起こる確率は

$$P(S)=\frac{29+1}{50}=\mathbf{\frac{3}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

また，選ばれた点 A_i において i が 3 の整数倍であるという事象を T とおくと，求める確率は

$$P_S(T)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}$$

である．事象 $S\cap T$ が起こるのは，$n=6,\ 9,\ \cdots,\ 33$ の 10 通りであるから

$$P_S(T)=\frac{\frac{10}{50}}{\frac{3}{5}}=\mathbf{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．