一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 ABC を考える．重心を G とする．動点 X は．三角形 ABC の 3 つの頂点と重心 G の 4 つの点の間を移動する．動点 X は最初に頂点 A に位置している．1 回目の移動で他の 3 つの点のいずれかを等しい確率 $\dfrac{1}{3}$ で訪れる．2 回目以降も同様とする．n 回目の移動後の動点 X の位置を観察する．n 回目の移動後に 3 点 X，C，G がつくる図形の面積を S_n とする．すなわち，X，C，G が三角形をつくるときは $S_n > 0$ であり，X，C，G が同一直線上にあるときは $S_n = 0$ である．ただし n は自然数とする．

(1) 1 回目の移動でつくられる図形の面積 S_1 と S_n が常に同じになる確率 P_n を n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 3$ とする．動点 X が常に $\mathrm{XG}=1$ を満たし．かつ 3 点 A，B，C すべてを少なくとも 1 回は訪れている確率を Q_n とする．$Q_n > P_n$ となることを示せ．ただし，最初にいる頂点 A は訪れた頂点として考えない．

(17 青森公立大 4)

【答】

(1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) 略

【解答】

(1) 三角形 ABC は正三角形であるから重心 G は外心でもあり，正弦定理より

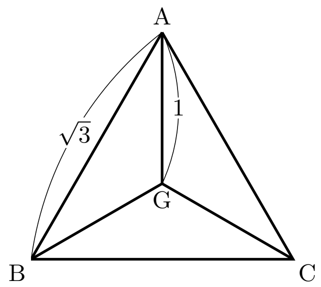
$$\mathrm{GA}(=\mathrm{GB}=\mathrm{GC}) = \frac{\mathrm{AB}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

である．

1 回目の移動後 X は B, C, X のいずれかに訪れる．このときつくられる図形の面積 S_1 は

$$\mathrm{X}=\mathrm{B}\text{ のとき，}S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\mathrm{X}=\mathrm{C},\ \mathrm{G}\text{ のとき，}S_1 = 0$$

である．



S_1 と S_n が常に同じになるのは，X の移動が

$$\mathrm{A}(\text{最初}) \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \cdots \quad (\mathrm{B},\ \mathrm{A}\text{ の移動を繰り返す})$$
$$\mathrm{A}(\text{最初}) \to \mathrm{C} \to \mathrm{G} \to \mathrm{C} \to \mathrm{G} \to \cdots \quad (\mathrm{C},\ \mathrm{G}\text{ の移動を繰り返す})$$
$$\mathrm{A}(\text{最初}) \to \mathrm{G} \to \mathrm{C} \to \mathrm{G} \to \mathrm{C} \to \cdots \quad (\mathrm{G},\ \mathrm{C}\text{ の移動を繰り返す})$$

のいずれかのときである．これらは排反であり，X は 1 回目の移動で他の 3 つの点のいずれかを等しい確率 $\dfrac{1}{3}$ で訪れるから，S_1 と S_n が常に同じになる確率 P_n は

$$P_n = 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $n \geqq 3$ のとき，動点 X が常に $\mathrm{XG}=1$ を満たし，かつ 3 点 A，B，C すべてを少なくとも 1 回は訪れる確率は，動点 X が常に A, B, C のいずれかを訪れる確率から A，B，C のうちの 2 点のみを訪れる確率を除けばよい．最初にいる頂点 A は訪れた頂点として考えないから，除く X の移動は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}(\text{最初}) \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \cdots \quad (\mathrm{B},\ \mathrm{A}\ \text{の移動を繰り返す}) \\
&\mathrm{A}(\text{最初}) \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \cdots \quad (\mathrm{B},\ \mathrm{C}\ \text{の移動を繰り返す}) \\
&\mathrm{A}(\text{最初}) \to \mathrm{C} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{A} \to \cdots \quad (\mathrm{C},\ \mathrm{A}\ \text{の移動を繰り返す}) \\
&\mathrm{A}(\text{最初}) \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \cdots \quad (\mathrm{C},\ \mathrm{B}\ \text{の移動を繰り返す})
\end{aligned}
$$

のときである．これらは排反であるから

$$Q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である．これより

$$
\begin{aligned}
Q_n - P_n &= \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= (2^n - 7)\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&\geqq (2^3 - 7)\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\because\ n \geqq 3) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&> 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，$n \geqq 3$ のとき

$$Q_n > P_n$$

となる.. …… (証明終わり)